

クロスプライ積層円筒殻の組合せ負荷による 座屈に及ぼす積層構成効果

大野 和之^{*1}・河合 啓太郎^{*2}・根本 圭一^{*3}・粕谷 平和^{*4}

Effect of Lamination Constitution on Buckling of Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells under Combined Loads

by

Kazuyuki OONO, Keitaro KAWAI, Keiichi NEMOTO and Hirakazu KASUYA

(Received on Sep. 30, 2006, accepted on Jan. 24, 2006)

Abstract

Advanced fiber-reinforced composite materials have been used for structural members in various fields because of their high specific strength and stiffness. In general, composite laminated cylindrical shells behave differently from homogeneous orthotropic cylindrical shells due to their anisotropy and asymmetric lamination. In the present paper, the buckling problems of carbon fiber/epoxy (CFRP) cross-ply laminated cylindrical shells under combined loads are considered. That is, the effects of the stacking sequence, number of layers, buckling mode and dimensions of cylinders on the buckling stress are analyzed by assuming that the buckling patterns satisfy the equation based on Flügge expressions.

Key words: Structural analysis, Composite materials, Laminated cylindrical shells, Buckling strength, Lamination constitution, Combined loads, Compression, Torsion, External pressure

1. ま え が き

炭素繊維からなる高性能繊維強化プラスチック材は比強度、比剛性が高く、各分野の構造に数多く用いられるようになってきた¹⁾。このような異方性材料からなる積層円筒殻は、積層の構成によりカップリング効果などの積層構成効果があり、均質な直交異方性円筒殻とは異なる力学的特性を示す。このような複合材料積層円筒殻の各種負荷のもとでの座屈現象を的確に把握しておく必要が生じ、数例の解析的研究の報告がなされている^{2)~5)}。

本論文では、研究報告例が少ない事例である複合材料積層円筒殻に軸圧縮力、ねじりモーメント、半径方向外圧力の組合せ負荷が作用する条件の座屈現象を考え、クロスプライ積層に着目し、比較的広範囲に適用できるFlüggeの殻理論⁶⁾を用いて近似的に座屈解析を行い、積層数、積層角、殻の形状寸法などが座屈値に及ぼす影響を系統的に検討し、最適積層構成の参考資料とする。

2. 積層円筒殻の基礎式と座屈解析法

2.1 基礎となる関係式

解析モデルとして、Fig.1に示すような半径 R 、筒長 L 、

板厚 h のクロスプライ積層円筒殻が軸圧縮力 P_c 、ねじりモーメント M_t 、半径方向外圧力 p_e を受ける場合について考える。円筒軸方向、円周方向、半径方向にそれぞれ x 、 y 、 z 軸をとり、中央面での座屈に伴う付加の変位成分を u 、 v 、 w とする。中央面における面内ひずみ成分 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 、曲率変化成分 κ_x 、 κ_y 、 κ_{xy} と変位成分との関係は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \kappa_y = -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2}\right) \\ \kappa_{xy} &= -\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \right\} (1)$$

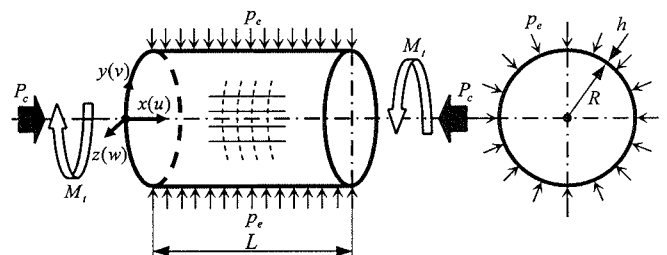


Fig.1 Configuration and coordinates of cross-ply laminated cylindrical shell.

* 1 工学研究科機械工学専攻修士課程
* 2 株式会社エフ・シー・シー 技術研究所
* 3 横浜ゴム株式会社 航空部品技術部
* 4 東海大学工学部動力機械工学科教授

また、合応力成分 N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} , 合モーメント成分 M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} と面内ひずみ成分, 曲率変化成分の関係を表す構成方程式は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} + \frac{B_{11}}{R} & A_{12} + \frac{B_{12}}{R} & A_{16} + \frac{B_{16}}{R} + \frac{D_{16}}{2R^2} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} + \frac{D_{26}}{2R^2} \\ A_{16} + \frac{B_{16}}{R} & A_{26} + \frac{B_{26}}{R} & A_{66} + \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{2R^2} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} + \frac{D_{66}}{2R^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} + \frac{D_{11}}{R} & B_{12} & B_{16} + \frac{D_{16}}{2R} \\ B_{12} & B_{22} - \frac{D_{22}}{R} & B_{26} - \frac{D_{26}}{2R} \\ B_{16} + \frac{D_{16}}{R} & B_{26} & B_{66} + \frac{D_{66}}{2R} \\ B_{16} & B_{26} - \frac{D_{26}}{R} & B_{66} - \frac{D_{66}}{2R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} + \frac{D_{11}}{R} & B_{12} + \frac{D_{12}}{R} & B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} + \frac{D_{16}}{R} & B_{26} + \frac{D_{26}}{R} & B_{66} + \frac{D_{66}}{R} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

ここで A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) はそれぞれ伸張剛性項, カップリング剛性項, 曲げ剛性項であり, 一方向強化材の繊維方向, 繊維に直角方向の縦弾性係数 E_L, E_T , ポアソン比 ν_L, ν_T およびせん断弾性係数 G_{LT} が与えられ, 積層数, 積層順序, 積層角などが指定されると求められる。

一般的な円筒殻が軸圧縮力, ねじりモーメント, 半径方向外圧力を受けて座屈するときの平衡方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} - \bar{N}_c \frac{\partial u^2}{\partial x^2} - 2\bar{N}_t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \bar{N}_e \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \bar{N}_c \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ - 2\bar{N}_t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \bar{N}_e \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - \frac{N_y}{R} - \bar{N}_c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + 2\bar{N}_t \left(\frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \bar{N}_e \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで, $\bar{N}_c (= \bar{P}_c / 2\pi R = \bar{\sigma}_c h)$ は座屈時の軸方向膜力であり, \bar{P}_c は座屈時の軸圧縮力, $\bar{\sigma}_c$ は座屈時の軸圧縮応力である。 $\bar{N}_t (= \bar{M}_t / 2\pi R^2 = \bar{\tau}_t h)$ は座屈時のねじり膜力であり, \bar{M}_t は座屈時のねじりモーメント, $\bar{\tau}_t$ は座屈時のねじり応力である。 $\bar{N}_e (= \bar{p}_e R)$ は座屈時の円周方向膜力であり, \bar{p}_e は座屈時の半径方向外圧力である。

2. 2 座屈値の解析式

複合材料積層円筒殻では多くのカップリング項があり, 座屈解析において, 境界条件と平衡方程式を厳密に満足する解析解を得ることは困難である。そこで本解析では, ある程度の筒長を有する場合を考え, 平衡方程式のみを満足する周期解を用いて, カップリング効果を主眼に近似的に検討する。すなわち非対称変形座屈様式として

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{mn} \sin \frac{\lambda x + ny}{R} \\ v &= V_{mn} \sin \frac{\lambda x + ny}{R} \\ w &= W_{mn} \cos \frac{\lambda x + ny}{R} \end{aligned} \right\} (4)$$

を仮定する²⁾。ここで $\lambda (= m\pi R/L)$ は軸方向半波長であり, U_{mn}, V_{mn}, W_{mn} はそれぞれ変位成分に対する変位係数を表し, m は軸方向半波数, n は円周方向波数である。式(3)に式(2), (4)を代入し整理すると, 座屈値は次の係数行列式から固有値として得られる。

$$\begin{vmatrix} H_{11} - \lambda^2 \bar{N}_c - 2\lambda n \bar{N}_t - n^2 \bar{N}_e & H_{12} & H_{13} + \lambda \bar{N}_e \\ H_{12} & H_{22} - \lambda^2 \bar{N}_c - 2\lambda n \bar{N}_t - n^2 \bar{N}_e & H_{23} - 2\lambda \bar{N}_t - n \bar{N}_e \\ H_{13} + \lambda \bar{N}_e & H_{23} - 2\lambda \bar{N}_t - n \bar{N}_e & H_{33} - \lambda^2 \bar{N}_c - 2\lambda n \bar{N}_t - n^2 \bar{N}_e \end{vmatrix} = 0 \quad (5)$$

ここで, 式中の H_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) は各種剛性項と殻の形状寸法で決まる。式(5)において, 各種波数 m, n を変化させて得られる固有値の最小値が座屈値である。軸圧縮力の座屈値を $K_c (= \bar{\sigma}_c R / E_T h)$, ねじり座屈値を $K_t (= \bar{\tau}_t R / E_T h)$, 半径方向外圧力の座屈値を $K_e (= \bar{p}_e R / E_T h)$ のように無次元座屈係数で表すと, 異方性材の材料定数, 積層構成が与えられることにより, 形状パラメータ $R/h, Z (= L^2/Rh)$, 積層角の関数として与えられる。

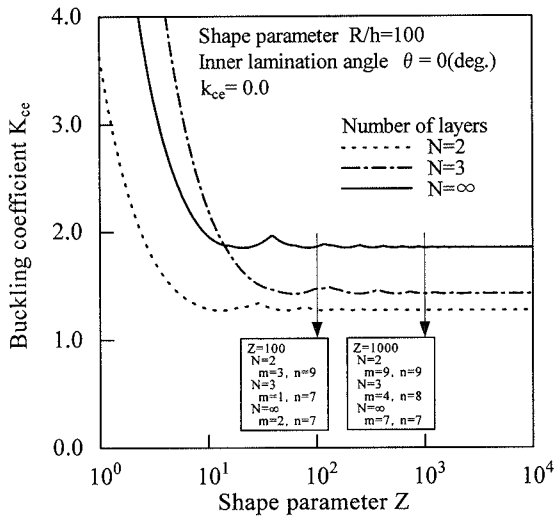
3. 数値計算例と解析結果の検討

数値計算例として, 炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材を考え, その基本弾性定数(繊維容積含有率 $V_f = 60\%$)を Table 1 に示す。これらは平均化近似解法によって求められ, 実験でも確かめられた値である⁷⁾。本計算例では, 板厚 h 一定のもとで, 各構成層は等厚とし, したがって積層数 N は対称積層の場合は奇数, 逆対称積層の場合は偶数として考える。また, 座屈時の軸方向膜力 \bar{N}_c と円周方向膜力 \bar{N}_e より荷重比 $k_{ce} (= \bar{N}_e / \bar{N}_c)$ を定義し, 半径方向外圧力の影響を考慮した軸圧縮座屈値 $\bar{\sigma}_{ce}$ を無次元座屈係数 $K_{ce} (= \bar{\sigma}_{ce} R / E_T h)$ の形で表す。

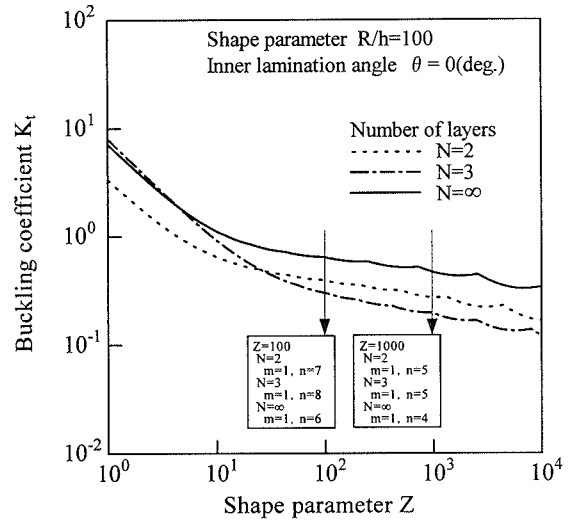
数値計算結果を, 対称積層($N=3$)と逆対称積層($N=2$), 板厚方向に均質な直交異方性($N=\infty$)について, 一例として形状パラメータ $R/h=100$ の場合を Fig.2~Fig.9 に示す。Fig.2 に軸圧縮力のみを受ける場合の座屈値を, Fig.3 に

Table 1 Material constants of carbon fiber/epoxy composites.

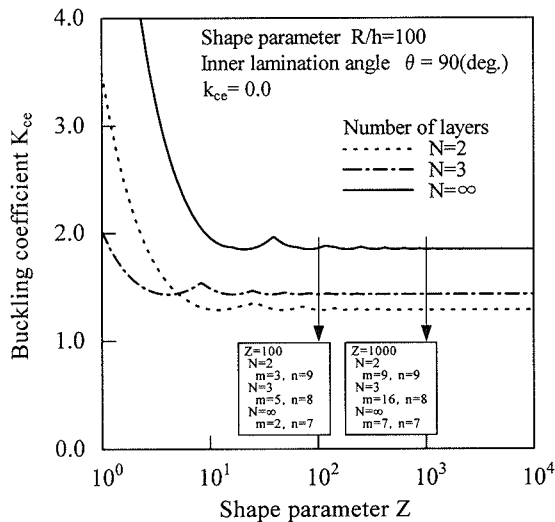
E_L [GPa]	E_T [GPa]	G_{LT} [GPa]	ν_L	ν_T
137	8.17	4.75	0.316	0.0189



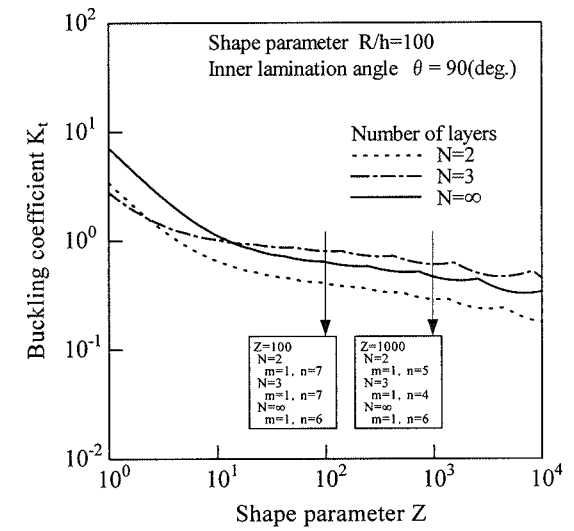
(a) Inner lamination angle $\theta=0$ (deg.)



(a) Inner lamination angle $\theta=0$ (deg.)



(b) Inner lamination angle $\theta=90$ (deg.)



(b) Inner lamination angle $\theta=90$ (deg.)

Fig.2 Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z . (compression)

Fig.3 Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z . (torsion)

ねじりモーメントのみを受ける場合を、Fig.4 に荷重比 $k_{cc}=0.1$ での軸圧縮力と半径方向外圧力を受ける場合を示す。(a)は最内層積層角が $0(\text{deg.})$ 、(b)は最内層積層角が $90(\text{deg.})$ の場合であり、 K_{cc} 値および K_t 値への形状パラメータ Z による影響について示している。Fig.5~7 では K_{cc} 値と K_t 値の関係を形状パラメータ Z 、荷重比 k_{cc} による影響について示す。Fig.8~9 に形状パラメータ $Z=1000$ における K_{cc} 値と K_t 値の関係を、荷重比 $k_{cc}=0.0, 0.1$ の場合について示す。(a)は最内層積層角が $0(\text{deg.})$ 、(b)は最内層積層角が $90(\text{deg.})$ の場合であり、 K_{cc} 値、 K_t 値、座標軸によって囲まれた領域が安定領域を示している。

3. 1 単独負荷の検討

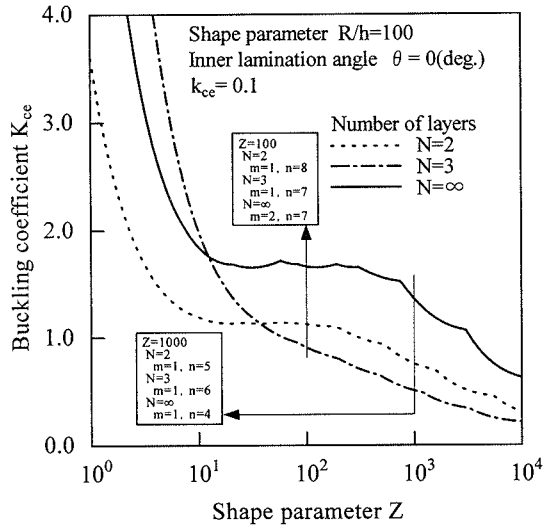
(1) 形状パラメータ Z の影響

単独負荷である荷重比 $k_{cc}=0.0$ の無次元座屈係数 K_{cc} と形状パラメータ Z の関係(Fig.2)は、対称積層、逆対称積層の場合ともに、一般的な筒長と考えられる $Z>100$ の領域では形状パラメータ Z とは無関係にそれぞれ一定値へ漸近する²⁾。 K_{cc} 値の最小値を与える座屈波形、軸方向半波数

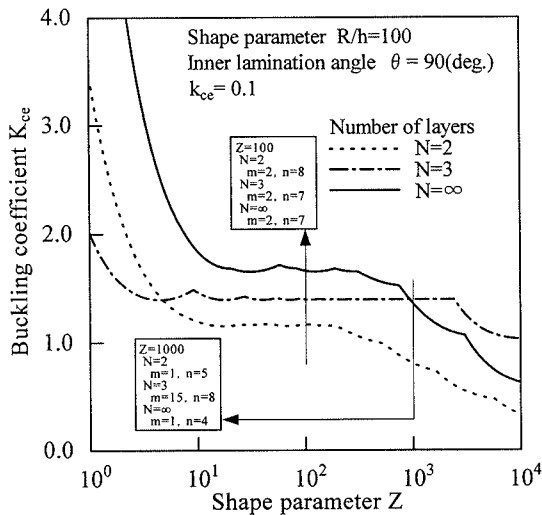
m 、円周方向波数 n は形状パラメータ Z に伴い変化する。無次元座屈係数 K_t と形状パラメータ Z との関係(Fig.3)は、対称積層、逆対称積層の場合ともに、形状パラメータ Z の増加に伴い K_t 値は低下する⁵⁾。また、円周方向波数 n は形状パラメータ Z の増加に伴い減少するが、軸方向半波数 m は常に 1 である。

(2) 積層数 N と積層順序の影響

対称積層の場合には、クロスプライ比(奇数番目の層の厚さの和と偶数番目の層の厚さの和との比)の変化によって、各種剛性値の変化が無次元座屈係数に及ぼす影響が大きく現れた。無次元座屈係数 K_{cc} は、対称積層の場合、積層順序に関わらず低下する。逆対称積層の場合では、クロスプライ比は一定値 1.0 となるが、中央面と中立面が異なるために生じる伸張-曲げカップリング効果が現れ、特に積層数 $N=2$ の場合に著しい低下を示す^{1)~4)}。また、 K_{cc} 値は対称積層、逆対称積層ともに最内層積層角を $0(\text{deg.})$ 、 $90(\text{deg.})$ と比較した場合、形状パラメータ $Z>100$ の領域では両者の差は極めて少ない。無次元座屈係数 K_t



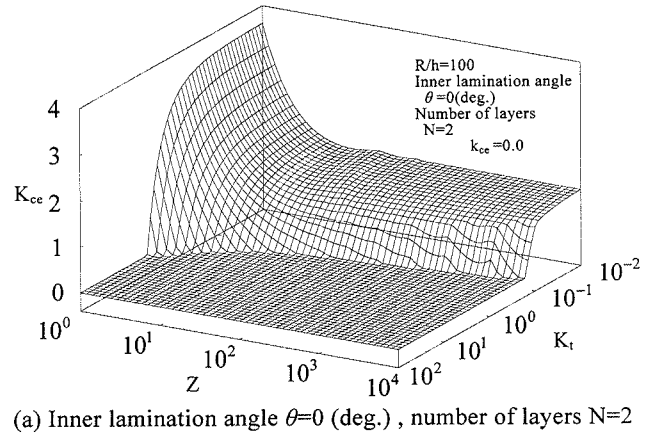
(a) Inner lamination angle $\theta=0$ (deg.)



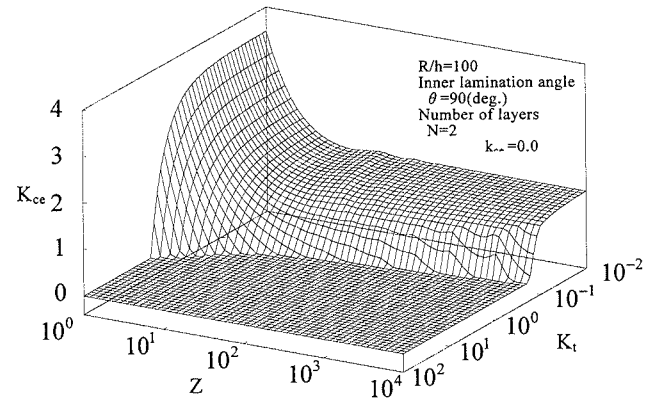
(b) Inner lamination angle $\theta=90$ (deg.)

Fig.4 Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z . (compression and external pressure)

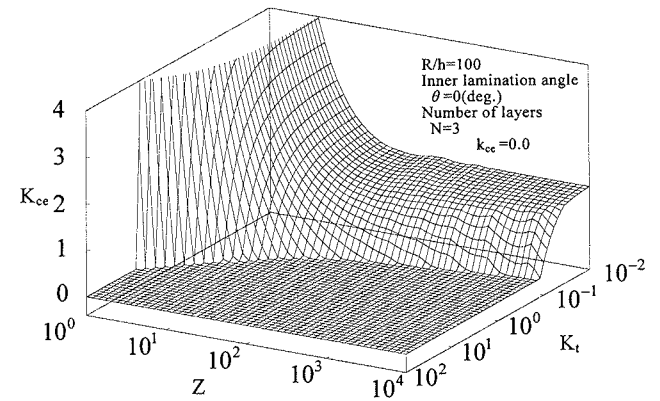
は、対称積層で最内層積層角が $0(\text{deg.})$ の場合、積層数 N の減少による値の低下が顕著になり⁵⁾、形状パラメータ Z の増加に伴いその差は大きくなる (Fig.3)。また、最内層積層角が $90(\text{deg.})$ の場合、積層数 N の減少に伴い K_t 値は増加する。このように対称積層では、積層構成が座屈値に及ぼす影響が顕著になっており、最内層積層角の変化およびクロスプライ比の変化による K_t 値に及ぼす影響が明確になる^{1),5)}。これは積層角が $0(\text{deg.})$ よりも $90(\text{deg.})$ のほうがねじり剛性が高く、高い座屈値を与えるためである。逆対称積層の場合には、カップリング効果による影響が現れ、 K_t 値は積層数 N が少ないと低下し、特に積層数 $N=2$ の場合に著しい低下を示す⁵⁾。また、積層順序が座屈値に与える影響は少なく、最内層積層角を $90(\text{deg.})$ とした積層構成のほうが、軸方向半波数 m は多くなる。また、 K_t 値の最小値を与える座屈波形は、軸方向半波数 m はすべての積層数 N に対して 1 であり、軸方向に半波形で座屈し、円周方向波数 n は積層数 N の増加に伴い減少する。



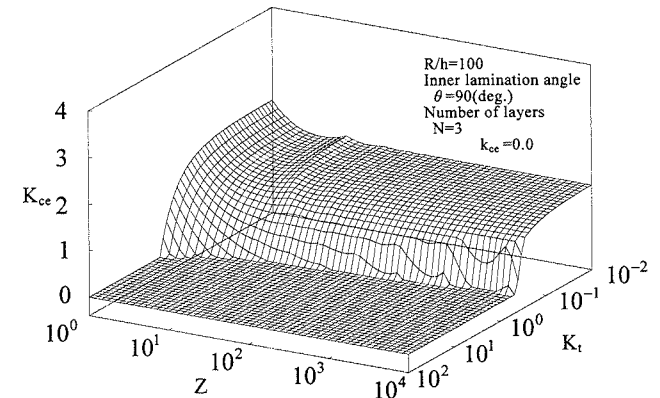
(a) Inner lamination angle $\theta=0$ (deg.), number of layers $N=2$



(b) Inner lamination angle $\theta=90$ (deg.), number of layers $N=2$

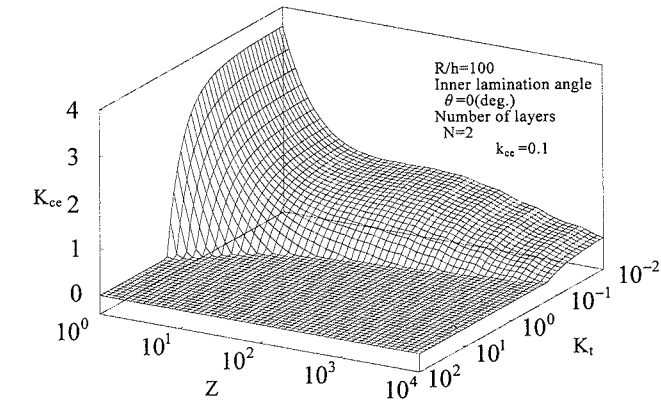


(c) Inner lamination angle $\theta=0$ (deg.), number of layers $N=3$

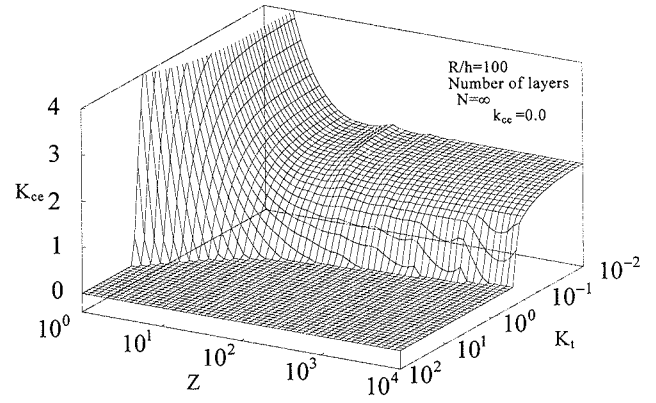


(d) Inner lamination angle $\theta=90$ (deg.), number of layers $N=3$

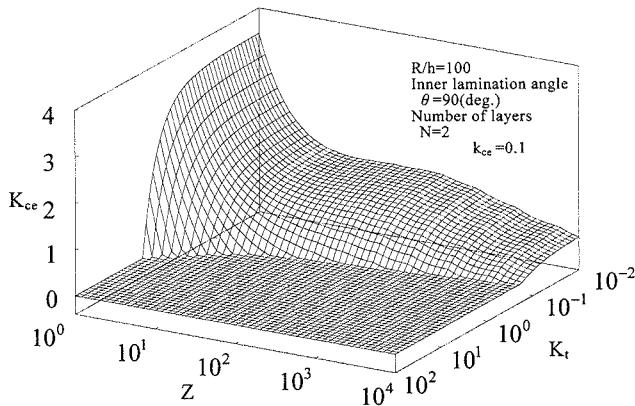
Fig.5 Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z . (compression and torsion)



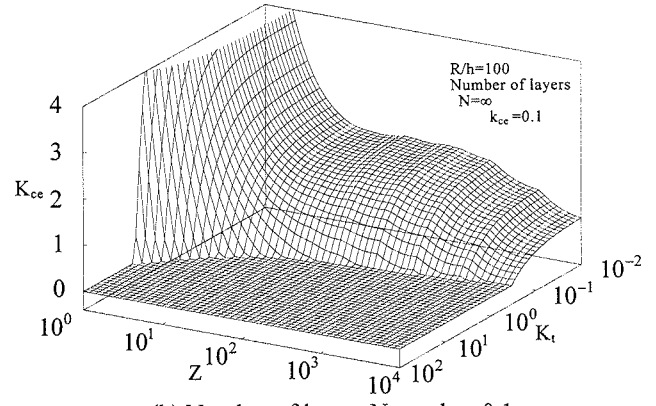
(a) Inner lamination angle $\theta=0$ (deg.), number of layers N=2



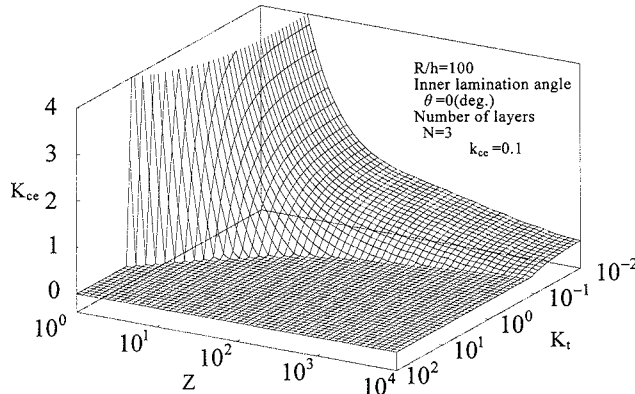
(a) Number of layers N= ∞ , $k_{cc}=0.0$



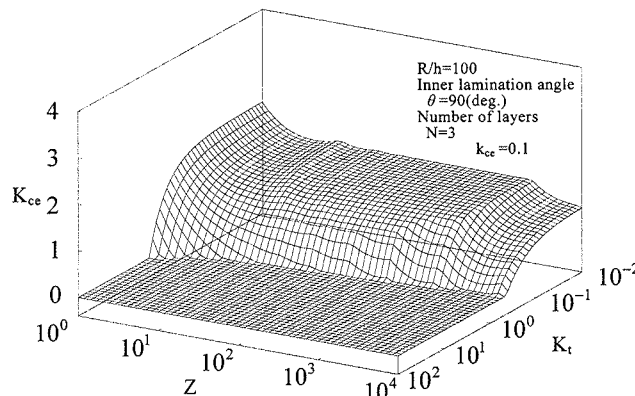
(b) Inner lamination angle $\theta=90$ (deg.), number of layers N=2



(b) Number of layers N= ∞ , $k_{cc}=0.1$



(c) Inner lamination angle $\theta=0$ (deg.), number of layers N=3



(d) Inner lamination angle $\theta=90$ (deg.), number of layers N=3

Fig.6 Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z. (compression, external pressure and torsion. $k_{cc}=0.1$)

Fig.7 Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z. (compression, external pressure and torsion. $k_{cc}=0.0, 0.1$)

3. 2 組合せ負荷の検討

(1) 形状パラメータ Z の影響

K_{cc} 値は形状パラメータ Z の増加に伴い低下し、 K_t 値、荷重比 k_{cc} が小さく、 $Z > 100$, $m > 1$ の場合、一定値に漸近する。また、 K_t 値、 k_{cc} の増加により $Z > 100$ においても K_{cc} 値は低下し、軸方向半波数 m が 1 となると大きく低下する²⁾。ねじりモーメント、半径方向外圧力による典型的な座屈波形である軸方向半波 m が 1 となる場合は、これらの負荷による座屈の影響が大きく現れる。

(2) 積層数 N と積層順序の影響

対称積層の場合、クロスプライ比の変化による影響が現れ、最内層積層角を $0(\text{deg.})$ とした場合、 K_{cc} 値および K_t 値は積層数 N の増加に伴い増加する。 $90(\text{deg.})$ とした場合、 K_t 値、荷重比 k_{cc} の増加に伴い板厚方向に均質な直交異方性より高い値を示し、積層数 N の増加に伴い低下する。逆対称積層の場合、 K_{cc} 値および K_t 値は積層順序による影響が少なく、積層数 N の増加に伴い増加する。

(3) 安定領域の検討

K_{cc} 値と K_t 値の安定領域(Fig.8, Fig.9)は、形状パラメータ Z の増加により狭くなり、対称積層の場合、板厚方向に均質な直交異方性の場合と比較し、安定領域は最内層積層角が $90(\text{deg.})$ の場合は広く、 $0(\text{deg.})$ とした場合は狭くなる。これは半径方向外圧力とねじりモーメントの影響が現れているといえる。よって、積層数 N の増加により、最内層積層角を $90(\text{deg.})$ とした場合は狭く、 $0(\text{deg.})$ とした場

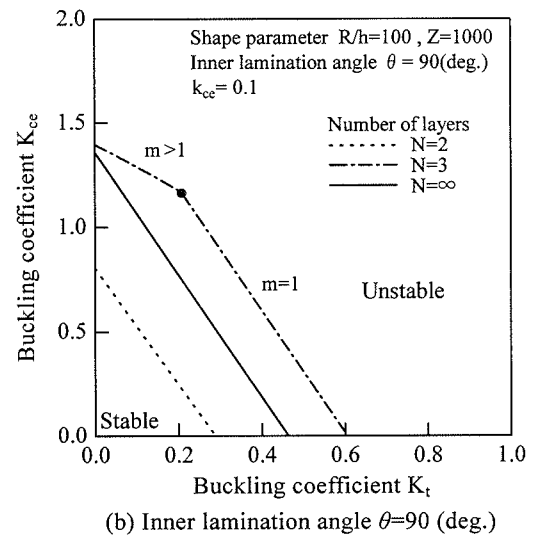
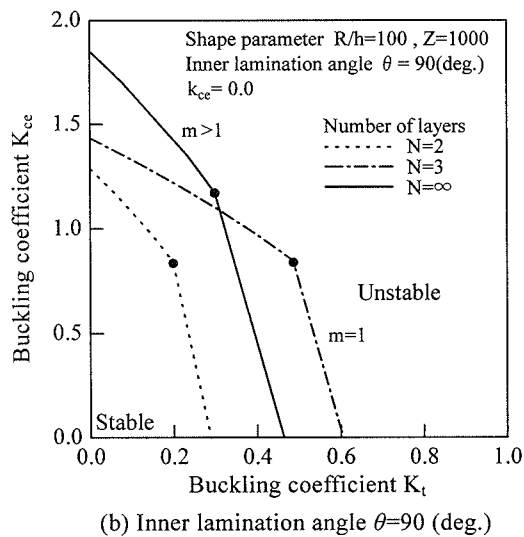
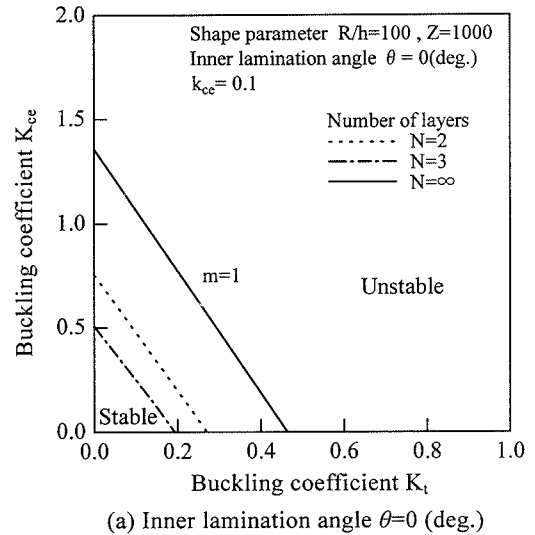
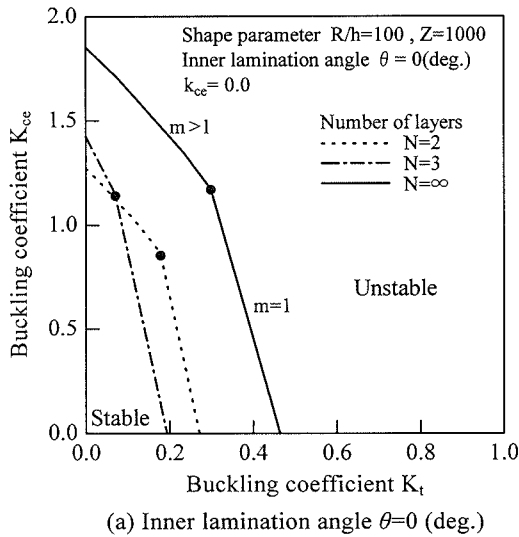


Fig.8 Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells. (compression and torsion. $Z=1000$)

合は広くなる。また、荷重比 k_{ce} の増加に伴い K_{ce} 値が減少するため安定領域は減少し、広範囲で軸方向半波数 m が 1 となる一直線による安定領域へ遷移する。よって組合せ負荷時の座屈値 K_{ce} 値と K_1 値の安定領域は、負荷形態による影響、対称積層の場合は積層順序の影響、逆対称積層の場合は積層数 N の影響が大きいことが示される。

4. あとがき

本論文では、軸圧縮力、ねじりモーメント、半径方向外圧力の組合せ負荷を受けるクロスプライ積層円筒殻の座屈現象について、Flügge の殻理論により座屈値を単独負荷状態から系統的に解析し、代表的な CFRP 材について、形状パラメータ Z 、積層角 θ に対して無次元座屈係数で示した。組合せ負荷状態での解析手法の妥当性を示し、特に座屈特性に及ぼす積層構成の影響を調べ、積層数、積層角、殻の形状寸法、負荷形態などの変化が座屈値に大きく影響することを示した。本論文では、面外連成問題の座屈値を求めたが、境界条件も満たす厳密解を求め、積層構成の最適化を行うことが今後の課題である。

Fig.9 Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells. (compression, external pressure and torsion. $Z=1000$, $k_{ce}=0.1$)

参考文献

- 1) 植村益次：“FRP 構造設計便覧”，強化プラスチック協会(1994).
- 2) 粕谷平和，植村益次：積層複合円筒殻の軸圧縮座屈に及ぼすカップリング効果，日本航空宇宙学会誌 Vol.30,No.346(1982),664.
- 3) 粕谷平和，植村益次：積層複合円筒殻の半径方向外圧による座屈に及ぼす積層構成効果，日本複合材料学会誌 Vol.12,No.2(1986),73.
- 4) 山岸保司，佐藤孝行，粕谷平和：複合材料積層円筒殻の静水圧座屈に及ぼす積層構成効果，東海大学紀要工学部，Vol.41,No.2(2001),129.
- 5) 河合啓太郎，粕谷平和：ねじりを受ける複合材料積層円筒殻の座屈解析，東海大学紀要工学部，Vol.43，No.2(2003),47.
- 6) W.Flügge：“Stresses in Shells”，Springer-Verlag, Berlin (1962)
- 7) 植村益次，山田直樹：炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数，材料，Vol.24,No.257(1975),156.