

半径方向衝撃外圧力を受けるクロスプライ 積層円筒殻の動的安定解析

山岸 保司*1・渡邊 浩光*2・粕谷 平和*3

Dynamic Stability Analysis of Cross-Ply Laminated Cylindrical Shells Subjected to Radial-Impact External Pressure

by

Yasuji YAMAGISHI, Hiromitsu WATANABE and Hirakazu KASUYA

(Received on Sep. 30, 2002, accepted on Dec. 25, 2002)

Abstract

The problem of the dynamic stability of cross-ply laminated cylindrical shells subjected to radial-impact external pressure is described. First, the motion of cylindrical shells subjected to radial-impact external pressure is defined as axially symmetric motion. Following this definition, certain perturbations are superimposed on this motion and their effect on the behavior of the shell is investigated. The symmetric state of motion of the shell is stable if the perturbations remain bounded. The solutions for the prebuckling motion and the perturbed motion are obtained using Galerkin's method. Stable regions are determined utilizing Mathieu's equation. The inevitability of dynamically unstable behavior is supported analytically and the effects of various factors, such as external pressure ratio, number of layers, inner lamination angle and dynamic unstable mode, are clarified.

Key words : Structural analysis, Cross-ply laminated cylindrical shells, Dynamic stability, Composite materials, Radial-impact external pressure, Mathieu's equation

1. まえがき

近代工業の躍進的發展に伴い、高速運転、省資源など多くの観点から構造物の重量軽減が強く要望されている。なかでも航空宇宙機器においては、構造の軽量化をはかることが極めて重要であり、従来の金属材料に代わって比強度、比剛性に優れ、材料設計の可能性をもつ複合材料積層構造方式が幅広く採用されている。

複合材料を用いて航空宇宙機器のような薄肉構造物を設計しようとするとき、構造物に作用する衝撃負荷の存在を考慮する必要があり、動的安定問題の力学的な解明は重要な研究課題である。

円筒殻が軸対称荷重を受ける場合、初期運動は軸対称運動であり、著者らは、既報においてこの運動を考慮し、衝撃継続時間が十分に長い場合に静的座屈値より低い値で動的不安定となることを示している^{1),2)}。

本論文では、半径方向衝撃外圧力を受けるクロスプライ積層円筒殻を例に挙げ、既報^{1),2)}と同様な手法を用いて、動的不安定現象の必然性を示す。手法としては基礎方程式から Mathieu 形方程式を導き、Flügge の殻理論による静的座屈値を用いた Mathieu の安定判別線図を用いて、静的座屈値以下の衝撃外圧力を負荷させた場合でも、不安定モードが発生することを明らかにする。また、不安定現象に与える諸因子、例えば、積層数、積層順序、負荷条件などの影響を解析的手法によって検討する。

2. 動的安定解析法

2. 1 基礎式

解析モデルとして Fig.1 に示すような半径 R 、筒長 L 、板厚 h のクロスプライ積層円筒殻が半径方向に均一な衝撃外圧力 $p(t)$ を受ける場合を考える。座標原点を円筒殻中央にとり、軸方向、円周方向、板厚方向にそれぞれ x 、 y 、 z 軸をとる。また、積層円筒殻は Fig.2 に示すように、各層とも均質な直交異方性の N 層積層からなり、 k 番目の層は基準面から $z = h_k \sim h_{k+1}$ の間に存在し、繊維は主軸方向 (0deg) と円周方向 (90deg) に交互に向いているものとする。

円筒殻の中央面における面内ひずみ成分 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 、曲率成分 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ と変位成分 u, v, w との関係は非線形項を考慮した有限変形理論を用いると次式のようになる。

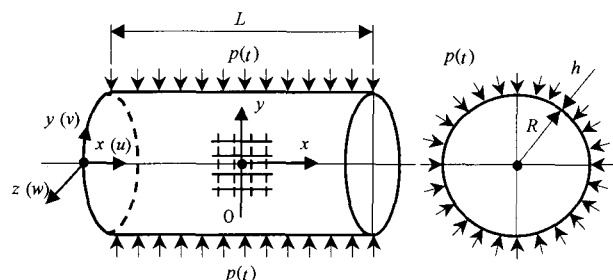
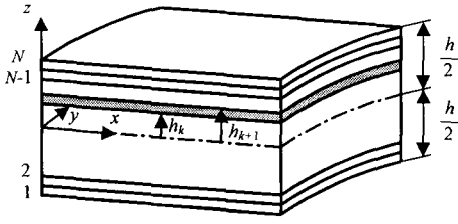


Fig.1 Configuration and coordinates of cross-ply laminated cylindrical shell.

*1 : 工学研究科機械工学専攻博士課程前期

*2 : (株) タチエス

*3 : 工学部動力機械工学科教授


 Fig.2 Geometry of an N -layered laminate.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (1)$$

永井ら^{3), 4)}も指摘しているように、円筒殻が十分に薄肉の場合には面内および回転慣性力の影響はいずれも無視することができる。本解析モデルの積層円筒殻は十分に薄肉と考えられるため、板厚方向すなわち面外慣性力のみ考慮し、ひずみ、曲率成分と各種剛性項からなる合応力 N_x , N_y , N_{xy} , および合モーメント M_x , M_y , M_{xy} を用いることによって面内および面外の平衡方程式はそれぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{N_y}{R} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &+ 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (2)$$

式 (2) の ρ は密度を表す。さらに板厚方向の平衡方程式は、応力関数 F と合モーメント成分を用いた次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ - h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ + p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで D_{ij} は曲げ剛性項である。一方、異方性材料定数 E_x , E_y , G_{xy} , ν_x , ν_y を用いると、適合条件式は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} E_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \left(2\nu_x E_y - \frac{E_x E_y}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \\ = E_x E_y \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \right\} (4)$$

本論文では、積層円筒殻に作用する外圧力を軸対称であると仮定しているため、初期に起こる運動は軸対称運動である。そ

の初期運動に添字 A を付けて表すと次式のようになる。

$$u_A = u_A(x, t), \quad v_A = 0, \quad w_A = w_A(x, t) \quad (5)$$

そして、初期運動時の面外平衡方程式を $H(w_A)$ とおくと次式のように表せる。

$$H(w_A) \equiv D_{11} \frac{\partial^4 w_A}{\partial x^4} + E_y \frac{w_A h}{R^2} + p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} = 0 \quad (6)$$

この初期運動の安定、不安定を論ずるために、この運動に微小擾乱を与え、その時間に対する変化を調べる。この擾乱に添字 B を付けて表すと擾乱の加わった運動は、

$$u = u_A + u_B, \quad v = v_A + v_B, \quad w = w_A + w_B \quad (7)$$

となる。ここで、 u_B , v_B , w_B は x , y , t の関数である。これを式 (3), (4) に代入すると、擾乱成分に関する平衡方程式および適合条件式は次のように導かれる。

$$\left. \begin{aligned} I(w_B) \equiv D_{11} \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_B}{\partial y^4} \\ - E_y h \frac{w_A}{R} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} + \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} = 0 \quad (8) \\ E_x \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^4} - \left(2\nu_x E_y - \frac{E_x E_y}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F_B}{\partial y^4} \\ = E_x E_y \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \right\} (9)$$

境界条件は、両端単純支持を想定し、円筒殻両端 ($x = \pm L/2$) での条件は、次のようになる。

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad N_x = 0, \quad v = 0 \quad (10)$$

2. 2 荷重条件

円筒殻に作用する外圧力 $p(t)$ の荷重条件を次式で示す。

$$\left. \begin{aligned} p(t) &= \frac{t}{t_p} p_0, & (0 \leq t \leq t_p) \\ p(t) &= p_0, & (t \geq t_p) \end{aligned} \right\} (11)$$

これは、外圧力が $t=0$ から作用し、 $0 \leq t \leq t_p$ で直線的に $p(t)$ が増加し、 t_p 時間後一定値 p_0 に保たれることを示している。なお、衝撃外圧力の継続時間を無限と仮定する。

2. 3 初期運動

式 (6) で示した初期運動の平衡方程式の近似解を求めるにあたり、負荷が作用した場合の波形モード w_A を次式のように仮定する。

$$w_A = a(t) h (1 + A_1 \sin ax \sinh ax + A_2 \cos ax \cosh ax) \quad (12)$$

ここで、 $a(t)$ は初期運動の時間に関する未知数であり、式中の係数は次式のようになる。

$$a = \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right)}} \quad (13)$$

一方、上式中の a の無次元量 α を次のように定める。

$$\alpha = \frac{L}{2} a = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right)}} \quad (14)$$

また、式 (12) 中の A_1, A_2 は境界条件により異なる値であり、両端単純支持の本解析においては式 (10) より、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{\sin \alpha \sinh \alpha}{(\cosh^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} \\ A_2 &= -\frac{\cos \alpha \cosh \alpha}{(\cosh^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} \end{aligned} \right\} (15)$$

となる。そして初期運動のたわみ w_A 成分の時間の未知数 $a(t)$ を求めるため、式 (12) の w_A を式 (6) に代入し、Galerkin 法を用いると、

$$\int_{-L/2}^{L/2} H(w_A)(1 + A_1 \sin \alpha x \sinh \alpha x + A_2 \cos \alpha x \cosh \alpha x) dx = 0 \quad (16)$$

となり、 $a(t)$ に関する 2 階常微分方程式が次のように得られる。

$$\rho h^2 (Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + h \left\{ \frac{E_y h}{R^2} (Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2) + \left(\frac{2}{L} \right)^4 D_{11} (C_1 Y_1 + C_2 Y_2) \right\} a(t) + p(t) Y_0 = 0 \quad (17)$$

ただし、各種記号は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -2\alpha^2 A_2 & C_1 &= -4\alpha^4 A_1 \\ B_2 &= 2\alpha^2 A_1 & C_2 &= -4\alpha^4 A_2 \\ Y_0 &= 1 + \frac{(A_1 + A_2) \sin \alpha \cosh \alpha - (A_1 - A_2) \cos \alpha \sin \alpha}{2\alpha} \\ Y_1 &= \frac{\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha}{2\alpha} - \frac{A_1}{8} \left(2 - \frac{\sin 2\alpha - \sinh \alpha}{\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{(A_1 - A_2) \sin 2\alpha \cosh 2\alpha + (A_1 + A_2) \cos 2\alpha \sinh 2\alpha}{16\alpha} \\ Y_2 &= \frac{\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha}{2\alpha} + \frac{A_1}{8} \left(2 + \frac{\sin 2\alpha + \sinh \alpha}{\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{(A_1 + A_2) \sin 2\alpha \cosh 2\alpha - (A_1 - A_2) \cos 2\alpha \sinh 2\alpha}{16\alpha} \end{aligned} \right\} (18)$$

また、時間 t, t_p を次のように無次元化する。

$$\tau = \frac{t}{R} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}}, \quad \tau_p = \frac{t_p}{R} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \quad (19)$$

そして、式 (11) を式 (17) に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} + \left(q + r \frac{\tau}{\tau_p} \right) a(\tau) + s \frac{\tau}{\tau_p} &= 0 \quad (0 \leq \tau \leq \tau_p) \\ \frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} + (q + r) a(\tau) + s &= 0 \quad (\tau \geq \tau_p) \end{aligned} \right\} (20)$$

ここで、式中の q, r, s は各種衝撃負荷形態時の解析式より求められ、衝撃外圧負荷の場合には、簡略化された次式となる。

$$\left. \begin{aligned} q &= 1 + \frac{D_{11}}{h} \frac{R^2}{E_y} \left(\frac{2}{L} \right)^4 \frac{C_1 Y_1 + C_2 Y_2}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} \\ r &= 0 \\ s &= \left(\frac{R}{h} \right)^2 \frac{[T]}{E_y} \frac{Y_0}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} I \end{aligned} \right\} (21)$$

なお、未知数 $a(\tau)$ の初期条件は、 $\tau=0$ で次式となる。

$$a(\tau) = 0, \quad \frac{da(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (22)$$

初期条件式 (22) のもとで式 (20) を解けば $a(\tau)$ が求まる。

ここで円筒殻に作用する衝撃外圧力 p_s と静的座屈値 p_s との比を荷重比 $I (= p_s/p_s)$ とする。また、式 (21) の固有ベクトル $[T]$ は外圧力を受けるクロスプライ積層円筒殻の静的座屈応力^{5),6)}であり、Flügge の殻理論⁷⁾ による解析式は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} H_{11} - n^2 N_e & H_{12} & H_{13} + \lambda N_e \\ H_{12} & H_{22} - n^2 N_e & H_{23} - n N_e \\ H_{13} + \lambda N_e & H_{23} - n N_e & H_{33} - n^2 N_e \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

解法は、上式を係数行列式から一般固有値問題に帰着させ、軸方向半波数 m 、円周方向波数 n を変化させて得られる N_e の正の最小値が座屈合応力であり、 $p_s = N_e R = [T]$ で示される。なお式中の $\lambda (= m\pi R/L)$ は軸方向半波長、 $H_{ij} (i,j=1,2,3)$ は形状パラメータ、各種剛性値からなる項である。

2. 4 初期運動の安定判別

初期運動の安定、不安定を論ずるにあたり、微小擾乱 u_B, v_B, w_B を初期運動に加え、その不安定現象を調べる。境界条件式 (10) を満足する変形様式として次式を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_B &= U_B(x, t) \sin \frac{ny}{R}, \quad v_B = V_B(x, t) \cos \frac{ny}{R} \\ w_B &= b(t) h \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}, \quad F_B = f_B(x, t) \sin \frac{ny}{R} \end{aligned} \right\} (24)$$

擾乱成分に関して、満たすべき残りの境界条件は、式 (10) の後者 2 つの面内境界条件より、

$$N_{,\theta} = 0, \quad v_B = 0, \quad \frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} = 0 \quad (25)$$

が導かれる。

2. 5 応力関数 F_B の算出

適合条件式 (9) に式 (24) を代入し、求めた f_B を式 (24) の最後の式に代入することで応力関数 F_B が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned}
 F_b &= \frac{E_y L^2 h}{R} b(t) \left[-\frac{(m\pi)^2}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (\ell L)^4} \cos \frac{m\pi x}{L} \right. \\
 &+ a(t) \frac{n^2 h}{4R} \{ F_1 \cosh m_1 x + F_2 \cosh m_2 x \\
 &+ H_1 \sin \left(a + \frac{m\pi}{L} \right) x \sinh ax + H_2 \sin \left(a - \frac{m\pi}{L} \right) x \sinh ax \\
 &+ J_1 \cos \left(a + \frac{m\pi}{L} \right) x \cosh ax + J_2 \cos \left(a - \frac{m\pi}{L} \right) x \cosh ax \} \\
 &\times \sin \frac{n\pi y}{R}
 \end{aligned} \right\} (26)$$

ここで上式中の各種係数は紙面の都合上省略する^{1),2)}.

2. 6 擾乱の方程式

$\tau \geq \tau_p$ における初期運動の安定性問題を考える. 式(8)の平衡方程式に応力関数のほか, 各諸値を代入し Galerkin 法を適用すると, 次式ようになる.

$$\int_0^{2\pi R} \int_{-L/2}^{L/2} I(w_b) \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R} dx dy = 0 \quad (27)$$

上式を解くことによって $b(t)$ に関する式が得られ, 時間の無次元量 ζ を導入するとによって,

$$\frac{d^2 b(\zeta)}{d\zeta^2} + (\phi + \psi \cos \zeta) b(\zeta) = 0 \quad (28)$$

となる Mathieu 形方程式⁸⁾が得られる. ただし, Mathieu パラメータ ϕ, ψ は次のようになる.

$$\left. \begin{aligned}
 \phi &= \frac{1}{\Omega^2} \frac{h}{R} \left[\left(\frac{R}{L} \right)^4 \frac{1}{Rh^2} \right. \\
 &\times \frac{D_{11}(m\pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi)^2(nL/R)^2 + D_{22}(nL/R)^4}{E_y} \\
 &+ \left. \frac{R}{h} \frac{(m\pi)^4}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (\ell L)^4} + Kn^2 W_1 \right] \\
 \psi &= \frac{1}{\Omega^2} Kn^2 \eta \frac{h}{R} W_1
 \end{aligned} \right\} (29)$$

上式中の Mathieu パラメータ ϕ, ψ は, 円筒殻の幾何学的形状, 各種剛性値および荷重条件が定まると m, n のみの関数となるので, m, n を順次変化させそれに対する安定判別を行う. なお, 式(29)の Ω, K, η は式(12)の未知数 $a(t)$ を求める際, Galerkin 法によって得られる定数項であり, W_1 は紙面の都合上省略する^{1),2)}. Mathieu 形方程式に解は, $b(\zeta)=0$ という安定解と, $b(\zeta)$

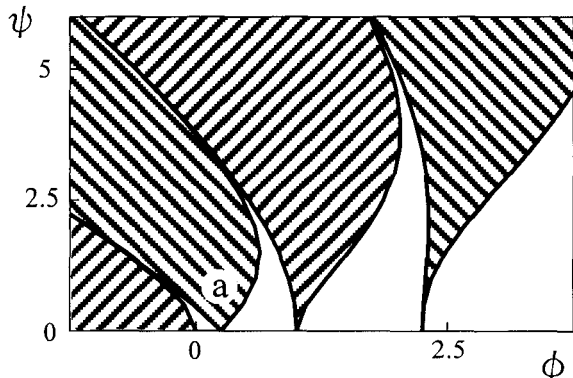


Fig.3 Mathieu's stability diagram.

が発散振動となる不安定解が得られる場合があり, それは Mathieu パラメータ ϕ, ψ の値に依存する. $\phi - \psi$ 平面上で安定, 不安定領域を示すには, その境界を示す必要があり, それは方程式の性質上 2π または 4π の周期解となる. それらの周期解を示すことによって得られる Mathieu の安定判別線図を Fig.3 に示す. 白い領域が安定領域, 斜線の部分が不安定領域であり, すべての波形モードが安定領域に存在した場合, その円筒殻は構造的に安定であるといえる.

3. 数値計算例と解析結果の検討

数値計算例として, 炭素繊維強化プラスチック (CFRP 材) を考える. その基本の弾性定数 (繊維容積含有率 $V_f=60\%$) は, 平均化近似解法による式により計算され, 実験でも確かめられた次の値である⁹⁾.

$$\left. \begin{aligned}
 E_L &= 137 \text{ (GPa)}, E_T = 8.17 \text{ (GPa)} \\
 G_{LT} &= 4.75 \text{ (GPa)}, \nu_L = 0.316, \nu_T = 0.0189 \\
 \rho &= 1540 \text{ (kg/m}^3\text{)}
 \end{aligned} \right\} (30)$$

著者らが以前に報告した静的負荷を受けるクロスプライ積層円筒殻の外圧座屈値を, 最内層積層角を $\theta=0(\text{deg.})$ とした場合を Fig.4 に, 最内層積層角を $\theta=90(\text{deg.})$ とした場合を Fig.5 にそれぞれ示す^{5),6)}. 最内層積層角 $\theta=0(\text{deg.})$ の場合には, 積層数の

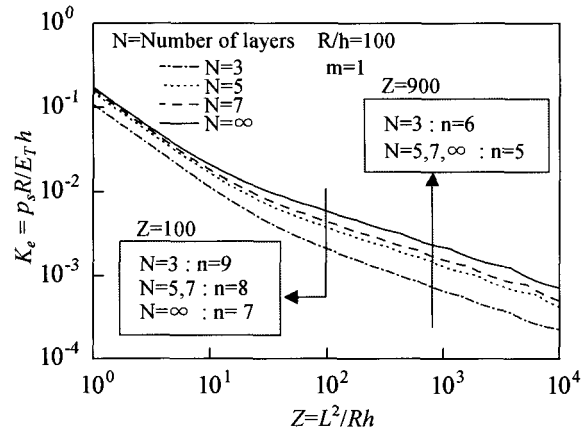


Fig.4 Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z . [Inner lamination angle $\theta=0(\text{deg.})$]

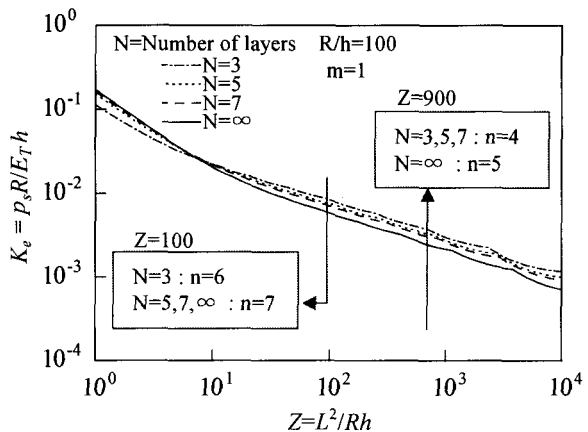


Fig.5 Variation of buckling coefficients of cross-ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z . [Inner lamination angle $\theta=90(\text{deg.})$]

減少による $K_e (=p_s R/E_T h)$ 値の低下が顕著に現れ、 Z の増加とともにその差は大きくなっている。また最内層積層角 $\theta = 90(\text{deg.})$ の場合には積層数の減少に伴い K_e 値は増加する。最内層積層角を $\theta = 0(\text{deg.})$ とした場合と $\theta = 90(\text{deg.})$ とした場合では、積層数の多少が K_e 値に及ぼす影響は逆に両者の差が明確になり、積層順序が座屈値に及ぼす影響は顕著になってくる。また、半径方向外圧力を受けるクロスプライ積層円筒殻の静的座屈値において、軸方向半波数 m は R/h , Z , 積層数 N に無関係にすべて 1 波で励起している。そこで上記の内容を考慮し、衝撃外圧力が作用したとき、不安定現象解析では軸方向半波数 m は 1 で励起すると考えられるため、動的解析時においても $m=1$ とする。

また、静的座屈外圧力より低い外圧力が動的に作用する場合、円周方向波数 n は放物線状に存在し、 n の増大に伴い ϕ , ψ の値も大きくなるが、ほとんどの波形モードが安定領域に含まれるため、Mathieu の安定判別線図において、もっとも広く重要となる Fig.3 の主不安定領域 a 近傍について検討する。

数値計算の一例として、Mathieu 形方程式の無次元係数 ϕ , ψ の関係について、形状パラメータ $R/h=100$, $Z (=L^2/Rh) = 900$, 荷重比 I が 0.3, 0.5, 0.7 のクロスプライ積層円筒殻について、最内層積層角 θ を、 $\theta = 0(\text{deg.})$, $\theta = 90(\text{deg.})$ の両方において積層数 N を 3, 5, 7, ∞ と変化させた場合をそれぞれ(a), (b), (c), (d)とし Fig.6 および Fig.7 にそれぞれ示す。

Fig.6 および Fig.7 に示すように、積層数が増加し、板厚方向に均質な直交異方性($N=\infty$)となると、積層順序が動的不安定に及ぼす影響はなくなる。そして、最内層積層角 $\theta = 0(\text{deg.})$ では積

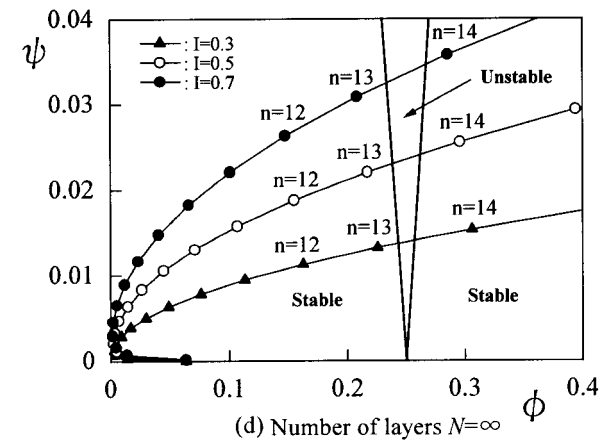
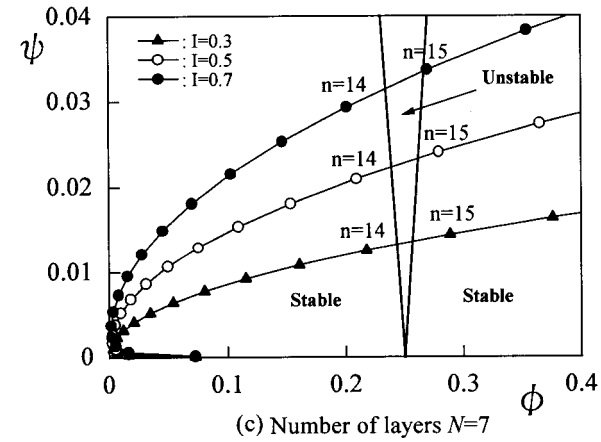
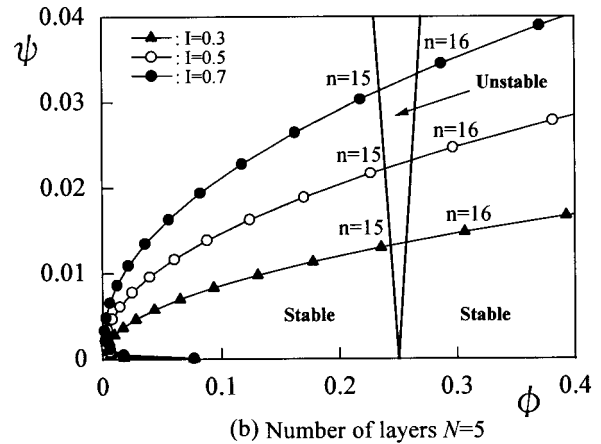
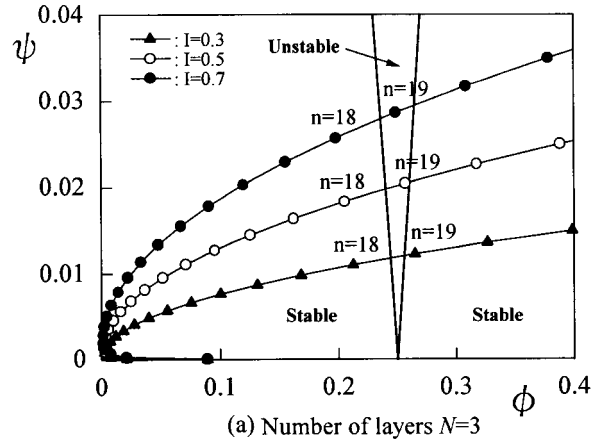


Fig.6 The relation between unstable region and wave mode n . [Inner lamination angle $\theta = 0(\text{deg.})$]

Table1 Extensional stiffness A_{ij} and bending stiffness D_{ij} . [Inner lamination angle $\theta = 0(\text{deg.})$]

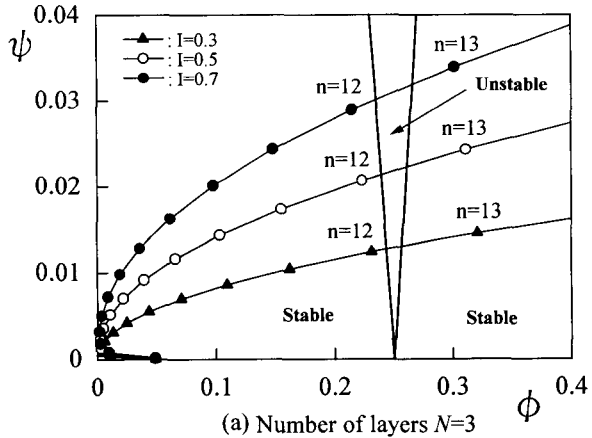
Number of layers N	3	5	7	∞
Cross-ply ratio M	2.0	1.5	1.3	1.0
A_{11}	9436	8575	8205	7282
A_{12}	259.5	←	←	←
A_{22}	5127	5990	6360	7282
A_{66}	474.3	←	←	←
D_{11}	11.1	9.2	8.3	6.1
D_{12}	0.2	←	←	←
D_{22}	1.1	2.9	3.8	6.1
D_{66}	0.4	←	←	←

$A_{ij} (\times 10^4 N/m^2 \cdot m) \quad D_{ij} (N/m^2 \cdot m^3)$

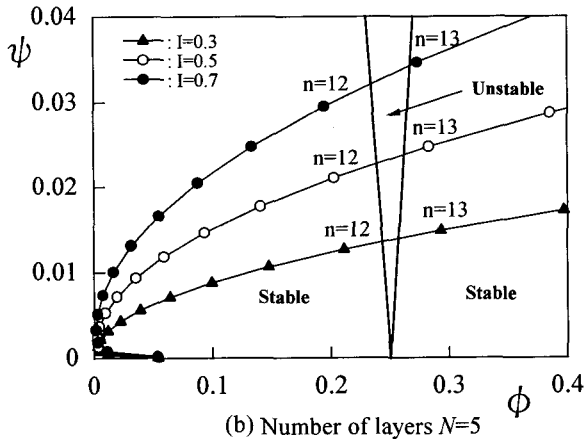
Table2 Extensional stiffness A_{ij} and bending stiffness D_{ij} . [Inner lamination angle $\theta = 90(\text{deg.})$]

Number of layers N	3	5	7	∞
Cross-ply ratio M	2.0	1.5	1.3	1.0
A_{11}	5129	5990	6360	7282
A_{12}	259.5	←	←	←
A_{22}	9436	8575	8205	7282
A_{66}	474.3	←	←	←
D_{11}	1.1	2.9	3.8	6.1
D_{12}	0.2	←	←	←
D_{22}	11.1	9.2	8.3	6.1
D_{66}	0.4	←	←	←

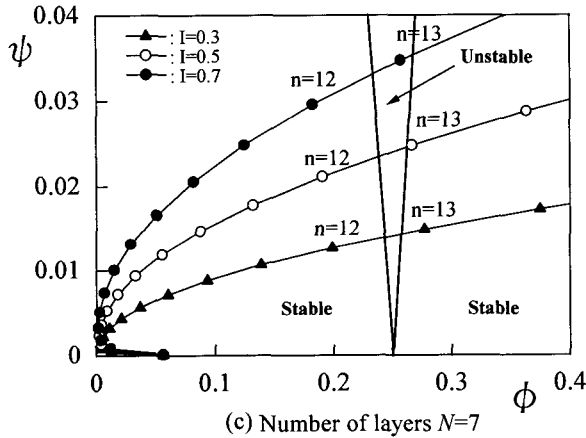
$A_{ij} (\times 10^4 N/m^2 \cdot m) \quad D_{ij} (N/m^2 \cdot m^3)$



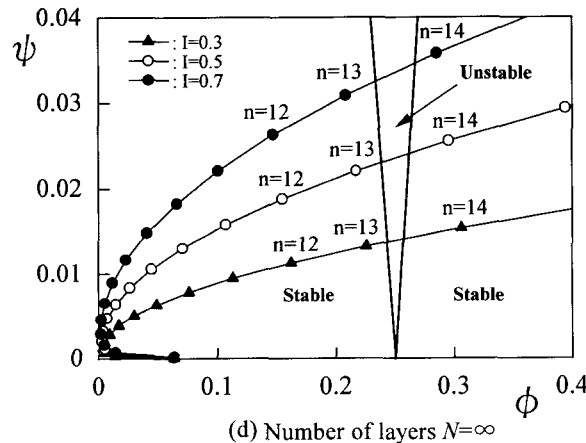
(a) Number of layers $N=3$



(b) Number of layers $N=5$



(c) Number of layers $N=7$



(d) Number of layers $N=\infty$

Fig.7 The relation between unstable region and wave mode n .
[Inner lamination angle $\theta=90(\text{deg.})$]

層数の増加に伴い、円周方向波数 n は低次の波形モードへ遷移し、それとは逆に、Fig.7 に示した最内層積層角 $\theta=90(\text{deg.})$ では積層数の減少に伴い n はわずかではあるが低次波形モードへと遷移している。これは円周方向剛性値と深く関係している。Table 1, 2 に示すように、最内層積層角 $\theta=0(\text{deg.})$ では積層数 N の増加に伴い円周方向剛性は増加し、最内層積層角 $\theta=90(\text{deg.})$ では積層数の減少に伴い円周方向剛性は増加する¹⁰⁾。つまり円周方向剛性の増加が円周方向波数 n を拘束するためこのような結果になったと考察できる。また、Fig.4, 5 に示すように静的座屈解析結果における円周方向波数は $n=4\sim 9$ であるのに対し、Fig.6, 7 に示す動的安定解析結果においては $n=13\sim 19$ と非常に大きな値となっている。

次に荷重比 I の影響をみると、積層順序、積層数にかかわらず、荷重比の増大に伴い、不安定領域に現れる円周方向波数 n は、 ψ が高次の波形モードに遷移していく傾向が確認できる。今回の解析では半径方向衝撃外圧を受けるアングルプライ積層円筒殻に見られる不安定領域の減少は見られなかった²⁾。

なお、動的不安定の起こる最小荷重比の限界を議論するためには、構造減衰を含んだ場合の安定判別式によって不安定領域を考慮しなければならない。

4. あとがき

本論文は、半径方向衝撃外圧を受けるクロスプライ積層円筒殻について、構造の安定性という観点から検討した。静的座屈応力を Flügge の殻理論を用いて解析し、Mathieu 形方程式を導き、Mathieu の安定判別を実施した。そして、座屈前軸対称運動を考慮することで、構造不安定領域を積層構成の影響とともに示し、静的座屈値と比較して低い衝撃外圧を受けた場合においても構造不安定となる可能性を示した。

参考文献

- 1) 粕谷平和, 松岡一雄: 衝撃外圧を受ける複合材料積層円筒殻の動的安定性, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.65, No.637 (1999), 1908.
- 2) 粕谷平和, 松岡一雄: 衝撃外圧を受けるアングルプライ積層円筒殻の動的安定性, 材料, Vol.48, No.12 (1999), 1367.
- 3) 永井健一, 八巻昇: 周期的な圧縮荷重をうける円筒かくの動的安定, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.45, No.395 (1979), 791.
- 4) 永井健一, 八巻昇: 周期外圧をうける円筒かくの動的不安定に及ぼす軸対称振動の影響, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.53, No.491 (1987), 1309.
- 5) 粕谷平和, 植村益次: 積層複合円筒殻の外圧による座屈, 材料, Vol.34, No.378 (1985), 262.
- 6) 粕谷平和, 植村益次: 積層複合円筒殻の半径方向外圧による座屈に及ぼす積層構成効果, 日本複合材料学会誌, Vol.12, No.2 (1986), 73.
- 7) W.Flügge: "Stresses in Shells", Springer-Verlag (1962).
- 8) N.W.McLachan: "Theory and Application of Mathieu Function", Dover Publications, Inc. (1964).
- 9) 植村益次, 山田直樹: 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24, No.257 (1975), 156.
- 10) R. M. Jones: "Mechanics of Composite Materials", Chap.4, Mc Graw-Hill (1975).