

ねじりを受ける複合材料積層円筒殻の座屈解析

河合 啓太郎^{*1}・粕谷 平和^{*2}

Buckling Analysis of Composite Laminated Cylindrical Shells under Torsion

by

Keitaro KAWAI and Hirakazu KASUYA

(Received on Sep. 30, 2003 & accepted on Nov. 26, 2003)

Abstract

Advanced fiber-reinforced composite materials have been used for structural members in various fields because of their high specific strength and stiffness. In general, composite laminated cylindrical shells behave differently from homogeneous orthotropic cylindrical shells due to their anisotropy and unsymmetric lamination. In the present study, the buckling problems of carbon fiber/epoxy (CFRP) cross-ply and angle-ply laminated cylindrical shells under torsion are considered. That is, the effects of the stacking sequence, number of layers, lamination angle, buckling mode and dimensions of cylinders on buckling stress are analysed by assuming the buckling patterns that satisfy the equation based on Flügge-type expressions.

Key words: Structural Analysis, Composite Materials, Laminated Cylindrical Shells, Buckling Strength, Torsion, Lamination Constitution

1. まえがき

高比強度、高比剛性の高性能繊維強化プラスチック材が開発され、各分野の構造に数多く用いられるようになってきた¹⁾。このような異方性材料よりなる複合材料積層円筒殻は、積層配列や強化繊維の配向等によってはカップリング効果などの各種積層構成効果があり、均質な直交異方性円筒殻とは異なる力学的挙動を示す。そこで、このような複合材料積層円筒殻の各種外力のもとでの座屈現象を的確に把握しておく必要が生じ、数例の解析的研究の報告がなされている²⁾⁻⁷⁾。

本論文では、複合材料積層円筒殻にねじりモーメントを加えた場合について取り挙げ、クロスプライおよびアングルプライ積層円筒殻を例にとって、比較的広範囲な円筒形状に適応できるFlüggeの殻理論⁸⁾を用いて理論解析し、積層順序、積層数、積層角、殻の形状寸法などのねじり座屈に及ぼす影響を系統的に検討し、最適積層構成に対する参考資料とする。

2. 積層円筒殻の基礎式と座屈解析法

2. 1 基礎となる関係式

Fig.1に示すような積層円筒殻(半径 R 、筒長 L 、板厚 h)が両端にねじりモーメント M_t を受ける場合について考え、

円筒軸方向、円周方向、半径方向にそれぞれ x 、 y 、 z 軸をとる。中央面での座屈に伴って発生する付加の変位を u 、 v 、 w とし、中央面から z なる距離にある点のひずみ成分を ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} とすると、関係は微小変形を仮定すると次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{zR}{R+z} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R+z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{R}{R+z} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{R+z}{R} \left\{ z + \frac{z}{R(R+z)} \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (1)$$

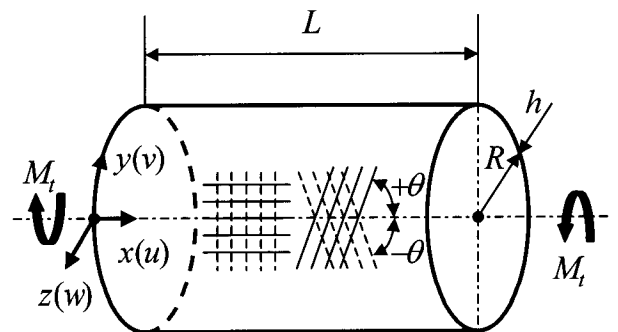


Fig.1 Configuration and coordinates of composite laminated cylindrical shell.

* 1 工学研究科機械工学専攻博士課程前期

* 2 工学部動力機械工学科教授

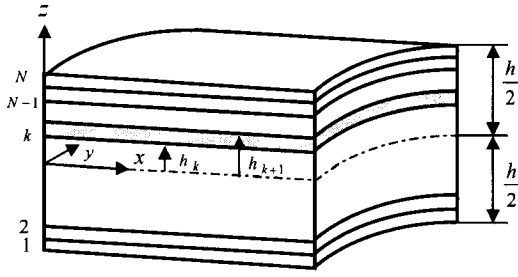

 Fig.2 Geometry of an N -layered laminate.

Fig.2 に示すように、隣接層と積層角が異なるときには厚さと無関係に一層として考え、そのような直交異方性の層が N 層からなると考える。 k 番目層は基準面から $z = h_{k+1} - h_k$ 間に存在する。 k 番目層での繊維方向座標の応力-ひずみの関係は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \tau_{LT} \end{Bmatrix}_{(k)} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LT} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (2)$$

ここで、 Q_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) は一方向強化材の弾性係数で、繊維方向、繊維と直角方向の縦弾性係数を E_L 、 E_T 、ポアソン比を ν_L 、 ν_T 、横弾性係数を G_{LT} とすると、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \nu_L \nu_T}, & Q_{12} &= \frac{\nu_T E_L}{1 - \nu_L \nu_T} \\ Q_{22} &= \frac{E_T}{1 - \nu_L \nu_T}, & Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \right\} (3)$$

構造主軸 x 、 y 方向の応力-ひずみ関係は式(3)を用いて、次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = [T]_{(k)} [Q]_{(k)} [T]_{(k)}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} = [\bar{Q}]_{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_{(k)} \quad (4)$$

ここで $[T]$ は応力変換マトリックスであり、次式で示される。

$$[T]_{(k)} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & 2\alpha\beta \\ \beta^2 & \alpha^2 & -2\alpha\beta \\ -\alpha\beta & \alpha\beta & \alpha^2 - \beta^2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ここで、 $\alpha = \cos \theta_k$ 、 $\beta = \sin \theta_k$ (θ_k : k 層での x 軸と繊維のなす角度) であり、式(4)における \bar{Q}_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) は次のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}\alpha^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\alpha^2\beta^2 + Q_{22}\beta^4 \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}\beta^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\alpha^2\beta^2 + Q_{22}\alpha^4 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\alpha^2\beta^2 + Q_{66}(\alpha^4 + \beta^4) \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\alpha^2\beta^2 + Q_{12}(\alpha^4 + \beta^4) \\ \bar{Q}_{16} &= -(Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\alpha^3\beta + (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\alpha\beta^3 \\ \bar{Q}_{26} &= -(Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\alpha\beta^3 + (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\alpha^3\beta \end{aligned} \right\} (6)$$

ただし、 \bar{Q}_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) は対称マトリックスとなる。

合応力と合モーメントは、各層内で厚さ方向に積分し、 N 層を総計して次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} [N_x, M_x] &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \sigma_x^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) [1, -z] dz \\ [N_y, M_y] &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \sigma_y^{(k)} [1, -z] dz \\ [N_{xy}, M_{xy}] &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \tau_{xy}^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R}\right) [1, -z] dz \\ [N_{yx}, M_{yx}] &= \sum_{k=1}^N \int_{h_k}^{h_{k+1}} \tau_{xy}^{(k)} [1, -z] dz \end{aligned} \right\} (7)$$

式(1)、(4)を式(7)に代入し、右辺を h/R について展開したとき、 $(h/R)^3$ の項まで保留して高次項を切り捨てることにより、合応力、合モーメントと面内ひずみ成分、曲率変化成分の関係を表す構成方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ N_{yx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} + \frac{B_{11}}{R} & A_{12} + \frac{B_{12}}{R} & A_{16} + \frac{B_{16}}{R} + \frac{D_{16}}{2R^2} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} + \frac{D_{26}}{2R^2} \\ A_{16} + \frac{B_{16}}{R} & A_{26} + \frac{B_{26}}{R} & A_{66} + \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{2R^2} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} + \frac{D_{66}}{2R^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} B_{11} + \frac{D_{11}}{R} & B_{12} & B_{16} + \frac{D_{16}}{2R} \\ B_{12} & B_{22} - \frac{D_{22}}{R} & B_{26} - \frac{D_{26}}{2R} \\ B_{16} + \frac{D_{16}}{R} & B_{26} & B_{66} + \frac{D_{66}}{2R} \\ B_{16} & B_{26} - \frac{D_{26}}{R} & B_{66} - \frac{D_{66}}{2R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{11} + \frac{D_{11}}{R} & B_{12} + \frac{D_{12}}{R} & B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} + \frac{D_{16}}{R} & B_{26} + \frac{D_{26}}{R} & B_{66} + \frac{D_{66}}{R} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} (8)$$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性項、 B_{ij} は伸張と曲げのカップリング剛性項、 D_{ij} は曲げ剛性項であり、次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ D_{ij} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} \begin{Bmatrix} (h_{k+1} - h_k) \\ (h_{k+1}^2 - h_k^2)/2 \\ (h_{k+1}^3 - h_k^3)/3 \end{Bmatrix} \quad (9)$$

一般的な積層材の場合、カップリング項として A_{16} 、 A_{26} 、 D_{16} 、 D_{26} 、 B_{11} 、 B_{12} 、 B_{16} 、 B_{22} 、 B_{26} 、 B_{66} が現れる⁹⁾。これらの値はクロスプライ積層やアングルプライ積層など積層の種類、対称積層や逆対称積層など積層構成あるいは積層数などによって一般に異なる。

また、 ε_x^0 、 ε_y^0 、 γ_{xy}^0 は円筒殻中央面における面内ひずみ成分、 κ_x 、 κ_y 、 κ_{xy} は曲率変化成分であり次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R}, & \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \kappa_y &= -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{R^2}\right) \\ \kappa_{xy} &= -\left(2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\right) \end{aligned} \right\} (10)$$

円筒殻が両端にねじりモーメント M_t を受けて座屈するときの付加の変位を用いて表した Flügge 型の平衡方程式は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial y} - 2\bar{N}_t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \\ &\quad - 2\bar{N}_t \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{N_y}{R} + 2\bar{N}_t \left(\frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = 0 \end{aligned} \right\} (11)$$

そして式(8)、(10)を式(11)に代入すると次のような変位表示による平衡方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \text{x 方向:} \\ \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(2A_{16} - 2\bar{N}_t \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(A_{66} - \frac{B_{66}}{R} \right. \\ \left. + \frac{D_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(A_{16} + \frac{2B_{16}}{R} + \frac{D_{16}}{R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(A_{12} + A_{66} \right. \\ \left. + \frac{B_{12}}{R} + \frac{B_{66}}{R} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\ - \left(3B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \left(B_{12} + 2B_{66} - \frac{D_{66}}{R} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y} \\ - \left(B_{26} - \frac{D_{26}}{R} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial w}{\partial x} + \left(\frac{A_{26}}{R} - \frac{B_{26}}{R^2} + \frac{D_{26}}{R^3} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \text{y 方向:} \\ \left(A_{16} + \frac{2B_{16}}{R} + \frac{D_{16}}{R^2} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12}}{R} + \frac{B_{66}}{R} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ + A_{26} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(A_{66} + \frac{3B_{66}}{R} + \frac{3D_{66}}{R^2} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(2A_{26} + \frac{4B_{26}}{R} \right. \\ \left. + \frac{2D_{26}}{R^2} - 2\bar{N}_t \right) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \left(A_{22} + \frac{B_{22}}{R} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(B_{16} \right. \\ \left. + \frac{2D_{16}}{R} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \left(B_{12} + 2B_{26} + \frac{D_{12}}{R} + \frac{3D_{66}}{R} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \\ - \left(3B_{26} + \frac{2D_{26}}{R} \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - B_{22} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left(\frac{A_{26}}{R} + \frac{B_{26}}{R^2} \right. \\ \left. - \frac{2\bar{N}_t}{R} \right) \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\}$$

z 方向:

$$\left. \begin{aligned} \left(B_{11} + \frac{D_{11}}{R} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \left(3B_{16} + \frac{D_{16}}{R} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \left(B_{12} + 2B_{66} \right. \\ \left. - \frac{D_{66}}{R} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \left(B_{26} - \frac{D_{26}}{R} \right) \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \left(\frac{A_{26}}{R} \right. \\ \left. - \frac{B_{26}}{R^2} + \frac{D_{26}}{R^3} \right) \frac{\partial u}{\partial y} + \left(B_{16} + \frac{2D_{16}}{R} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \left(B_{12} + 2B_{66} \right. \\ \left. + \frac{D_{12}}{R} + \frac{3D_{66}}{R} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} + \left(3B_{26} + \frac{2D_{26}}{R} \right) \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\ - \left(\frac{A_{26}}{R} + \frac{B_{26}}{R^2} + \frac{2N_t}{R} \right) \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{A_{22}}{R} \frac{\partial v}{\partial y} - D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} \\ - \left(2D_{12} + 4D_{66} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ + \frac{2B_{12}}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{2B_{22}}{R} - \frac{2D_{22}}{R^2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left(\frac{4B_{26}}{R} - \frac{2D_{26}}{R^2} \right. \\ \left. - 2\bar{N}_t \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \left(\frac{A_{22}}{R^2} - \frac{B_{22}}{R^3} + \frac{D_{22}}{R^4} \right) w = 0 \end{aligned} \right\} (12)$$

ここで、 $\bar{\tau}_t$ を座屈時のねじり応力とし、 $\bar{N}_t (= \bar{\tau}_t h)$ は座屈時のねじり膜力であり、 $\bar{M}_t (= 2\pi \bar{\tau}_t R h)$ は座屈時のねじりモーメントである。

2. 2 座屈値の解析式

複合材料積層円筒殻の座屈解析においては、多くのカップリング項があり、境界条件と平衡方程式の両者を厳密に満足する解析解を得ることは難しい。そこで、本解析では、ある程度の筒長を考え、平衡方程式のみを完全に満足する周期解を用いて、近似的に検討する。すなわち非対称座屈様式として

$$\left. \begin{aligned} u &= U_{mn} \sin \{(\lambda x + n y)/R\} \\ v &= V_{mn} \sin \{(\lambda x + n y)/R\} \\ w &= W_{mn} \cos \{(\lambda x + n y)/R\} \end{aligned} \right\} (13)$$

を考え、式(12)に代入すると、式(12)の各項は同じ関数形となり変位係数に関する連立同次方程式となる。ここで $\lambda (= m\pi R/L)$ は軸方向半波長であり、 m は軸方向半波数、 n は円周方向波数である。

クロスプライ積層円筒殻、アングルプライ積層円筒殻の場合ともに座屈値は次の係数行列式から固有値として解析式で得られる。

$$\begin{vmatrix} H_{11} - 2\lambda n \bar{N}_t & H_{12} & H_{13} \\ H_{12} & H_{22} - 2\lambda n \bar{N}_t & H_{23} - 2\lambda \bar{N}_t \\ H_{13} & H_{23} - 2\lambda \bar{N}_t & H_{33} - 2\lambda n \bar{N}_t \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

式(14)を解くと次式が得られる。

$$F_1(\bar{\tau}_t h)^3 + F_2(\bar{\tau}_t h)^2 + F_3(\bar{\tau}_t h) + F_4 = 0 \quad (15)$$

ここで、 $H_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 、 $F_1 \sim F_4$ は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
 H_{11} &= \left(A_{11} + \frac{B_{11}}{R} \right) \lambda^2 + 2A_{16} \lambda n + \left(A_{66} - \frac{B_{66}}{R} + \frac{D_{66}}{R^2} \right) n^2 \\
 H_{12} &= \left(A_{16} + \frac{2B_{16}}{R} + \frac{D_{16}}{R^2} \right) \lambda^2 + \left(A_{12} + A_{66} + \frac{B_{12}}{R} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{B_{66}}{R} \right) \lambda n + A_{26} n^2 \\
 H_{13} &= \left(\frac{B_{11}}{R} + \frac{D_{11}}{R^2} \right) \lambda^3 + \left(\frac{3B_{16}}{R} + \frac{D_{16}}{R^2} \right) \lambda^2 n + \left(\frac{B_{12}}{R} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2B_{66}}{R} - \frac{D_{66}}{R^2} \right) \lambda n^2 + \left(\frac{B_{26}}{R} - \frac{D_{26}}{R^2} \right) n^3 + A_{12} \lambda \\
 &\quad + \left(A_{26} - \frac{B_{26}}{R} + \frac{D_{26}}{R^2} \right) n \\
 H_{22} &= \left(A_{66} + \frac{3B_{66}}{R} + \frac{3D_{66}}{R^2} \right) \lambda^2 + 2 \left(A_{26} + \frac{2B_{26}}{R} + \frac{D_{26}}{R^2} \right) \lambda n \\
 &\quad + \left(A_{22} + \frac{B_{22}}{R} \right) n^2 \\
 H_{23} &= \left(\frac{B_{16}}{R} + \frac{2D_{26}}{R^2} \right) \lambda^3 + \left(\frac{B_{12}}{R} + \frac{2B_{66}}{R} + \frac{D_{12}}{R^2} + \frac{3D_{66}}{R^2} \right) \lambda^2 n \\
 &\quad + \left(\frac{3B_{26}}{R} + \frac{2D_{26}}{R^2} \right) \lambda n^2 + \frac{B_{22}}{R} n^3 + \left(A_{26} + \frac{B_{26}}{R} \right) \lambda + A_{22} n \\
 H_{33} &= \frac{D_{11}}{R^2} \lambda^4 + \frac{4D_{16}}{R^2} \lambda^3 n + \left(\frac{2D_{12}}{R^2} + \frac{4D_{66}}{R^2} \right) \lambda^2 n^2 \\
 &\quad + \frac{4D_{26}}{R^2} \lambda n^3 + \frac{D_{22}}{R^2} n^4 + \frac{2B_{12}}{R} \lambda^2 + \left(\frac{2B_{22}}{R} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2D_{22}}{R^2} \right) n^2 + \left(\frac{4B_{26}}{R} - \frac{2D_{26}}{R} \right) \lambda n + \left(A_{22} - \frac{B_{22}}{R} + \frac{D_{22}}{R^2} \right)
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= 8\lambda^3 n(1-n^2) \\
 F_2 &= 4\lambda^2 n^2 \left(H_{11} + H_{22} + H_{33} - \frac{1}{n} H_{11} - \frac{1}{n} H_{23} \right) \\
 F_3 &= 2\lambda n \left(-H_{11} H_{12} - H_{11} H_{33} - H_{22} H_{33} - \frac{2}{n} H_{12} H_{13} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2}{n} H_{11} H_{23} + H_{12}^2 + H_{13}^2 + H_{23}^2 \right) \\
 F_4 &= H_{11} H_{22} H_{33} + 2H_{12} H_{13} H_{26} - H_{12}^2 H_{33} - H_{13}^2 H_{33} \\
 &\quad - H_{23}^3 H_{11}
 \end{aligned} \tag{17}$$

ねじり座屈値は、 $K_i = \bar{\tau}_i R / E_i h$ のように無次元座屈係数で表すと、円筒殻の材料定数の他に形状パラメータ R/h 、 $Z (= L^2 / Rh)$ の関数であり、軸方向半波数 m 、円周方向波数 n の整数値に対する最小値に相当する。

3. 数値計算例と解析結果の検討

数値計算例として用いた、CFRP 材(繊維容積含有率 $V_f = 60\%$)の材料定数を Table1 に示す。これは平均化近似解法¹⁰⁾による式により計算され、実験で確かめられた値である。本計算例では、全板厚 h のもとで、各構成層は等厚とし、したがって積層数 N は対称積層の場合は奇数、逆対称積層の場合は偶数として考える。

3.1 クロスプライ積層円筒殻の検討

クロスプライ積層円筒殻は、軸方向(0deg.)と円周方向(90deg.)の2層を交互に積層したものとする。その場合に

Table1 Material constants of carbon fiber/epoxy composites.

E_L [GPa]	E_T [GPa]	G_{LT} [GPa]	ν_L	ν_T
137	8.17	4.75	0.316	0.0189

は $A_{i6} = B_{i6} = D_{i6} = 0 (i=1,2)$ となる。対称積層ではさらに $B_{ij} = 0 (i, j=1,2,6)$ となり、カップリング項は現れないが、逆対称積層では伸張-曲げカップリング項 B_{11} 、 B_{22} が現れる。数値計算結果を、対称積層について、最内層積層角が 0(deg.)を Fig.3 (a)に、最内層積層角が 90(deg.)を(b)に示し、逆対称積層について、最内層積層角が 0(deg.)を Fig.4 (a)に、最内層積層角が 90(deg.)を(b)に示す。これらの図では、殻の形状パラメータ Z に対して無次元座屈係数 K_i で表し、一例として $R/h=100$ の場合について示している。

(1) 形状パラメータ Z の影響

無次元座屈係数 K_i と形状パラメータ Z との関係は、対称積層、逆対称積層の場合ともに、 Z の増加に伴い K_i 値が低下している。ある程度の筒長を有する場合、 K_i 値の低下を両対数表示で直線的と見なすと、 $K_i = a/Z^b$ の形で表すことができる。ここで a 、 b は積層構成、積層順序、積層数などによって決定される。

(2) 積層数 N の影響

対称積層の場合には、クロスプライ比(奇数番目の層の厚さの和と偶数番目の層の厚さの和との比)の変化による各種剛性値の変化が無次元座屈係数 K_i に及ぼす影響が大きく現れた。最内層積層角が 0(deg.) の場合には積層数の減少による K_i 値の低下が顕著になり、 Z の増加に伴いその差は大きくなる。また最内層積層角が 90(deg.) の場合には、積層数の減少に伴い最層積層角が 0(deg.) の場合とは逆に K_i 値は増加する。このように対称積層では、最内層積層角を 0(deg.)とした場合と 90(deg.)とした場合とでは、積層数の増減が K_i 値に及ぼす影響は逆に両者の差が明確になり、積層順序が座屈値に及ぼす影響は顕著になってくる。これは積層角が 0(deg.)よりも 90(deg.)のほうが高い座屈値を与えるためである。

逆対称積層の場合には、クロスプライ比は一定値となるが、中央面と中立面が異なるために生ずる伸張-曲げカップリング効果が現れ、 K_i 値は積層数 N が少ないと低下し、特に2層の場合に著しい低下を示した。

(3) 座屈波形の影響

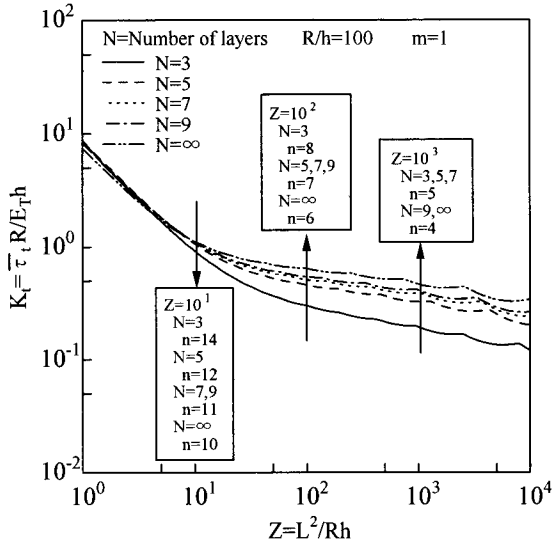
最小座屈値を与える座屈波形のうち、軸方向半波数 m はすべての形状パラメータ Z 、積層数 N に対して1であり、軸方向に半波形で座屈する。しかし、円周方向波数 n は図中に示してあるように、形状パラメータ Z 、積層数 N の増加に伴い減少する。

(4) 積層順序の影響

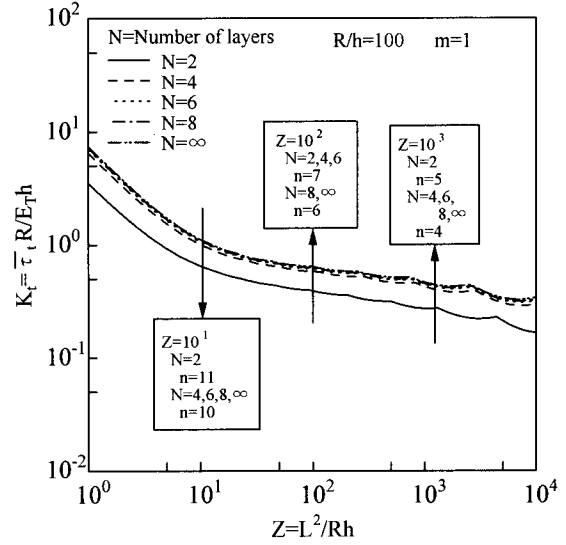
対称積層では、最内層積層角を 0(deg.)とした場合と 90(deg.)とした場合とでは、前述したように積層順序が座屈値に及ぼす影響は大きく現れる。しかし、逆対称積層では、伸張剛性 A_{11} と A_{22} および曲げ剛性 D_{11} と D_{22} の値が同一になるため、積層順序が座屈値に与える影響はなくなる。

3.2 アングルプライ積層円筒殻の検討

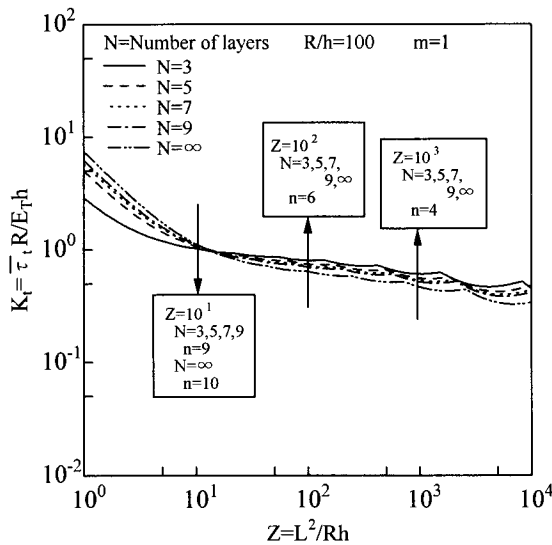
アングルプライ積層円筒殻は、円筒主軸に対して(+ θ)



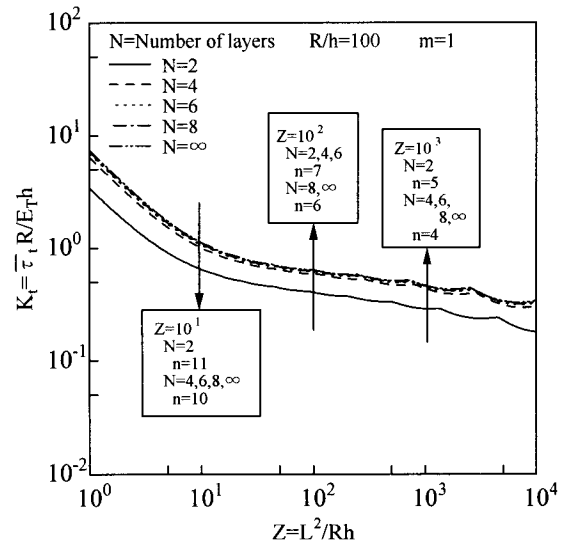
(a) Inner lamination angle $\theta = 0$ (deg.)



(a) Inner lamination angle $\theta = 0$ (deg.)



(b) Inner lamination angle $\theta = 90$ (deg.)



(b) Inner lamination angle $\theta = 90$ (deg.)

Fig.3 Variation of buckling coefficients of symmetric cross - ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z .

Fig.4 Variation of buckling coefficients of antisymmetric cross - ply laminated cylindrical shells with shape parameter Z .

$(-\theta)$ ($\theta = 0 \text{ deg.} \sim 90 \text{ deg.}$) の 2 層を交互に積層したものとする。その場合には、 $B_{11} = B_{12} = B_{22} = B_{66} = 0$ となりカップリング項としては、対称積層では伸張-せん断カップリング項 A_{16} 、 A_{26} および曲げ-ねじりカップリング項 D_{16} 、 D_{26} が現れ、逆対称積層では伸張-ねじり(せん断-曲げ)カップリング項 B_{16} 、 B_{26} が現れる。数値算結果を、対称積層の場合を Fig.5(a)に、逆対称積層の場合を(b)に示す。座屈値に及ぼす形状パラメータ Z の影響はクロスプライ積層円筒殻と同様に表されるので、一例として $Z=900$ 、 $R/h=100$ の場合について、積層角 θ に対して無次元座屈係数 K_i で示している。

(1) 積層角 θ の影響

無次元座屈係数 K_i と積層角 θ の関係は、極めて積層数少ない場合を除き、対称積層、逆対称積層の場合ともに θ の増加に伴い変化し、積層角が $0(\text{deg.})$ のとき最小値を、

積層角が $70(\text{deg.})$ 近傍のとき最大値を示す。

(2) 積層数 N の影響

積層数 N の変化による無次元座屈係数 K_i の影響は、積層角 $0(\text{deg.})$ 、 $90(\text{deg.})$ の場合には、無関係であるが、その中間の積層角 $0(\text{deg.}) < \theta < 90(\text{deg.})$ では、対称積層では伸張-せん断カップリング効果により、逆対称積層では伸張-ねじり(せん断-曲げ)カップリング効果により積層数が減少すると K_i 値も減少する。特に 2 層の逆対称積層の場合には、著しい低下を示し、他の積層数の場合とは異なる挙動を示す。

(3) 座屈波形の影響

最小座屈値を与える座屈波形のうち、軸方向半波数 m は、積層数 N 、積層角 θ に無関係で一定値 1 である。また、円周方向波数 n は、積層数 N および積層角 θ の増加に伴い減少を示す。

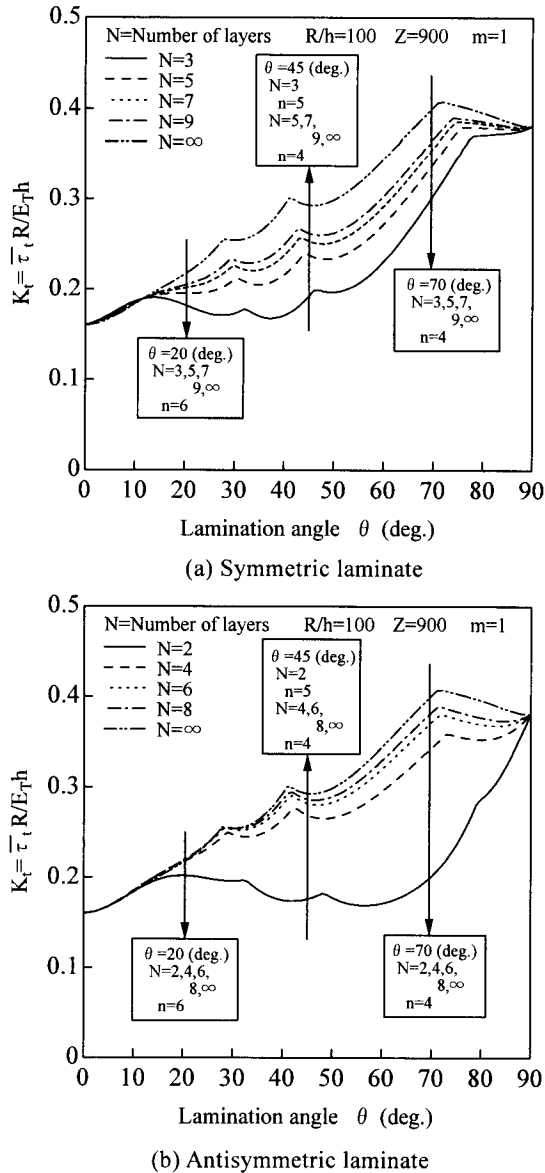


Fig.5 Variation of buckling coefficients of angle - ply Laminated cylindrical shells with lamination angle θ .

4. あとがき

本論文では、ねじりモーメントを受ける複合材料積層円筒殻の座屈現象について、Flügge の殻理論により座屈値を解析し、代表的な CFRP 材について、形状パラメータ Z 、積層角 θ に対して無次元座屈係数 K_c で表示した。特に座屈特性に及ぼす積層構成の影響を調べ、積層順序、積層数、積層角、殻の形状寸法などの変化が座屈値に大きく影響することを示した。

本論文では、面内変形と面外変形とが連成する問題の座屈値を求めたが、積層構成効果を考慮した積層構成の最適化を行うことが今後の課題である。

参考文献

- 1) 植村益次：“FRP 構造設計便覧”，強化プラスチック協会(1994).
- 2) 粕谷平和，植村益次：積層複合円筒殻の軸圧縮座屈に及ぼすカップリング効果，日本航空宇宙学会誌 Vol.30,No.346(1982),664.
- 3) 粕谷平和，植村益次：積層複合円筒殻の半径方向外圧による座屈に及ぼす積層構成効果，日本複合材料学会誌 Vol.12,No.2(1986),73.
- 4) 粕谷平和：積層複合円筒殻の静水圧座屈に及ぼす積層構成の影響，材料，Vol.38,No.435(1989),14.
- 5) 粕谷平和：ねじりを受ける積層複合円筒殻の一座屈解析，日本複合材料学会誌，Vol.17,No.2(1991),74.
- 6) 粕谷平和，青山淳：アングルプライ積層円筒殻の曲げ座屈に及ぼす積層構成効果，材料，Vol.45,No.8 (1996),888.
- 7) 山岸保司，佐藤孝行，粕谷平和：複合材料積層円筒殻の静水圧座屈に及ぼす積層構成効果，東海大学紀要工学部，Vol.41,No.2(2001),129.
- 8) W.Flügge：“Stresses in Shells”，Springer-Verlag, Berlin (1962).
- 9) R.M.Jones：“Mechanics of Composite Materials”，Mc Graw-Hill,New York (1975).
- 10) 植村益次，山田直樹：炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数，材料，Vol.24,No.257(1975),156.