東海大学紀要工学部
Vol. 43, No. 2, 2003, pp. 5-9.

作図による球面波と平面波の関係の解明

山崎正之*1

Pictorial Analysis of Relationships between Spherical and Plane Waves

by

Masayuki YAMAZAKI

(Received on September 4, 2003 & accepted on Novembers 26, 2003)

Abstract

Spherical and plane waves have been described in many textbooks. In this paper, we show by illustrations that a spherical wave can be constructed by the envelopment/superposition of plane waves or inversely that a spherical wave can be decomposed into plane waves each having the same phase at certain point but a distinct propagation direction. A spherical wave is a spherical wave itself. At the same time, a spherical wave is equivalent to the superposition of many plane waves. Based on two interpretations of a spherical wave, we discuss Fraunhofer diffraction and the form of the wavefront of light emitted from an atom.

Keywords: plane wave, spherical wave, Huygens's principle, envelop, principles of superposition, probability

1．はじめに

波動に関連した書籍をひもとくと、波面（等位相面）が球面である球面波と波面が平面である平面波とが必ずといっていいほど取り上げられている．それは，これら２種類の波が波の基本形で，これらを正しく把握することが波動現象全般の理解に欠かせないからである．

私たちがよく目にする波は，雨滴が水面に作る波である．この波（の波面）は，Fig.1 に示したように，雨滴が落ちた点を中心に仕手円形に広がっていく．この波の波面の半径は伝わるにつれて大きくなる．波源から十分に離れたところでは，波面の微小部分は平面波の一部とよく似てくる．そこで，波源から十分離れていれば，球面波の一部を平面波として扱ってもかまわないと言われる．

波面の形は，普通は，伝わるにつれて変化していく．この変化を説明するために，ホイヘンスは，Fig.2 に示したように，第 0 世代の波面上の各点から２次球面波が発生し，それらの包絡線（面）が第１世代の波面を作り，さらに第 1 世代の波面上の各点から２次球面波が発生し，それらの包絡線が第２世代の波面を形作っていくと考えた．

フレネルはホイヘンスの考え方に波の周期変化と重ね合わせの原理（干渉性）を付け加え，波の一部を障害物（開口）でさえぎると，波の振幅と位相が複雑な変化を示す現象――回折現象――を見事に説明した．フレネルと同じ時期にフランホーファーは，開口から十分に離れたところでは，波が平面波（の集合）で表せることを導いた．

これらの議論は，点波源や開口から十分はなれたところでは，波が平面波（の集合）で表せる状態になることを示す．このことは広く認められているが，波源や開口の近くでは波を平面波（の集合）として考えてはいけないのだろうかという疑問が生じる．ここでは，紙面に垂直な直線を中心にした円筒波を例にして，図を使ってこの疑問に答える．

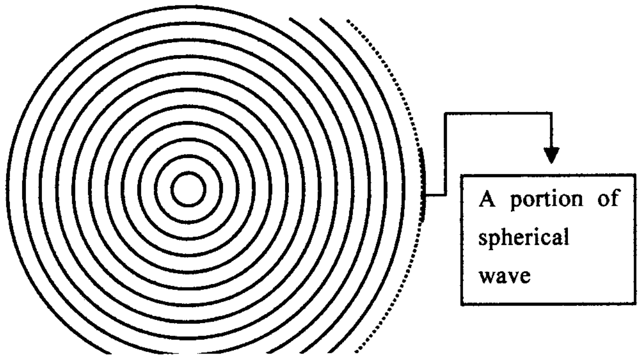


Fig. 1 Wavefront of a spherical, monochromatic wave.
As a spherical wavefront propagates out, its radius increases. Far enough away from the source, a small area of the wavefront will closely resemble a portion of a plane wave.

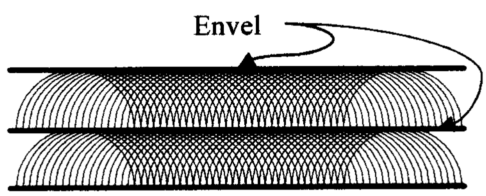


Fig.2 Huygens's principle.
Envelop of secondary waves generated from points on 0th generation wavefront forms wavefront of 1st generation.

2．円筒波を平面波の重ねあわせで表す

Figure3(a), (b), (c)に示した平行な直線群は紙面内を、たがいに60度ずつ異なる方向に向かって進む６つの平面波の波面―たとえば波の山の位置―を表している．図 3(d)は，これ

＊１工学部応用理学科教授

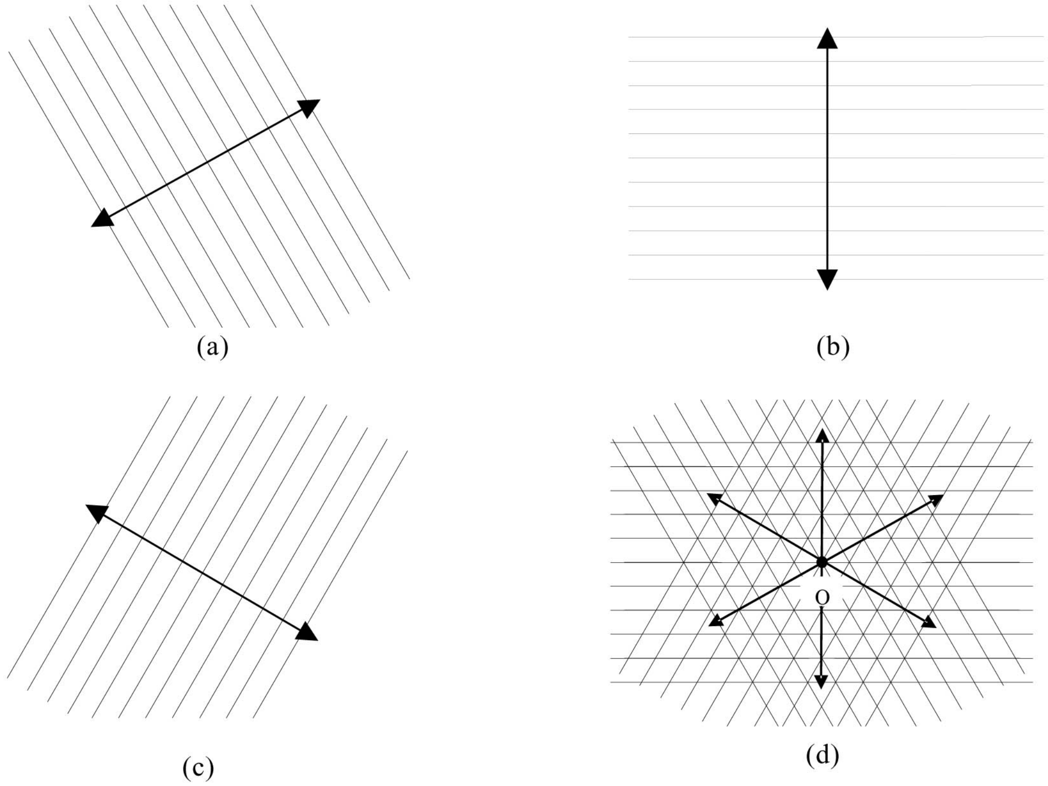


Fig.3　Wavefronts of plane, monochromatic waves.
(a), (b), (c) Wavefront of six plane waves traveling in different directions.
(d) Superposition of plane waves shown in (a), (b) and (c). Arrows show propagating directions.

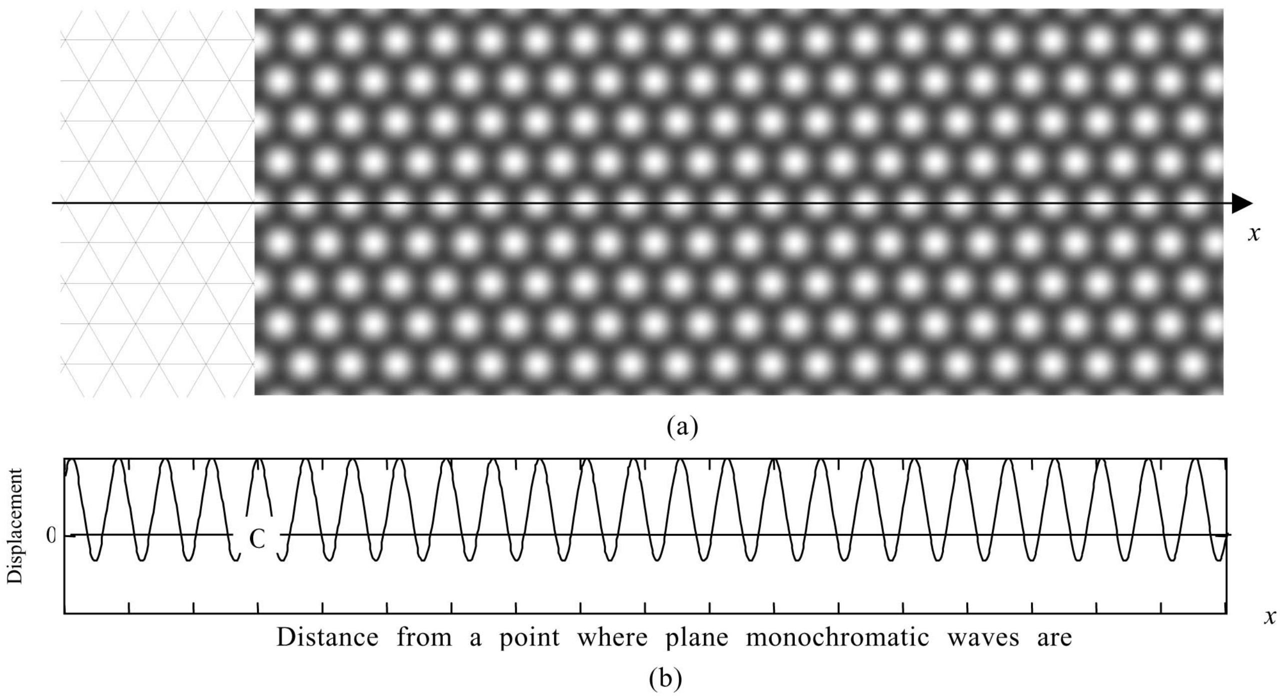


Fig.4　(a) Wavefronts and displacement of waves when six plane, monochromatic waves traveling in different directions are superimposing in phase at a point O.　(b) Displacement of waves along x axis shown in (a)

ら 6 つの平面波の波面を重ね書きした図である．

図 4(a)の左側の線画は図 3(d)の転記で，（同じ位相で，60 度の角度で交差しあう 6 つの平面単色波の波面），右側の明暗図形は，そのときに現れる波の変位量を明暗の程度で表した結果である．図 4(b)は図 4(a)に示した直線 Ox 上の変位量である．3 つの平面単色波の山の位置が一致するところ（3 本

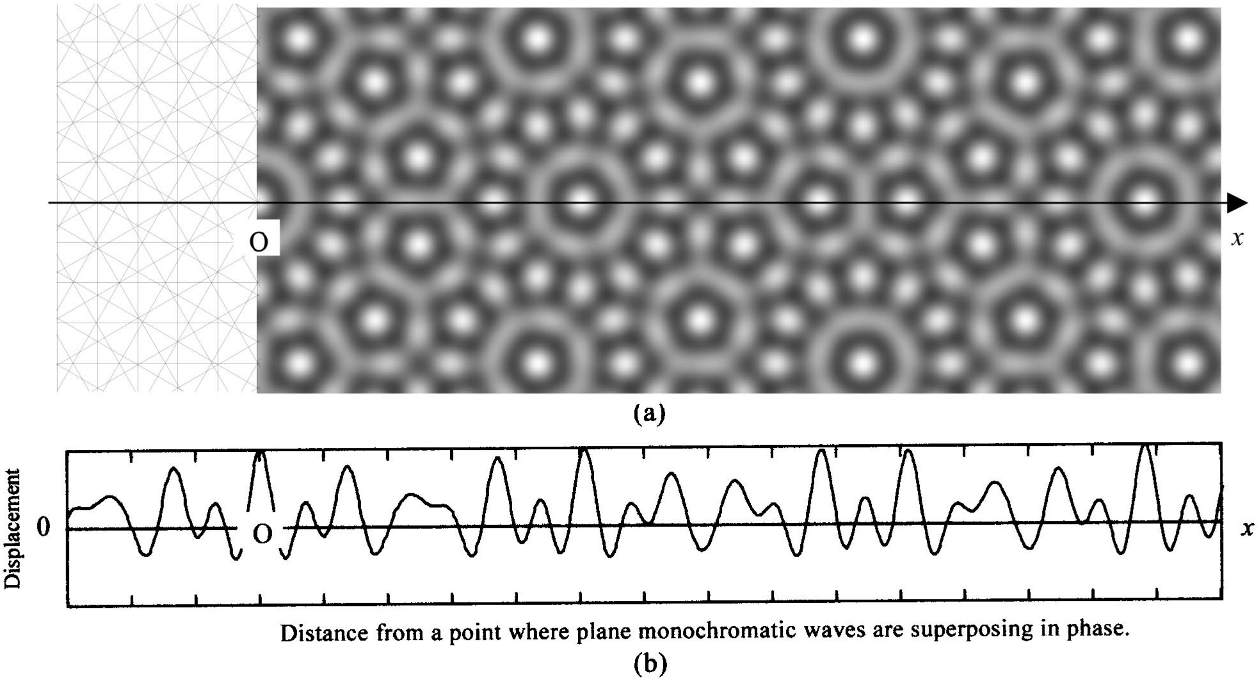


Fig.5 (a) Wavefronts and displacement of waves when 12 plane, monochromatic waves traveling in different directions are superimposing. (b) Displacement of waves along x axis shown in (a).

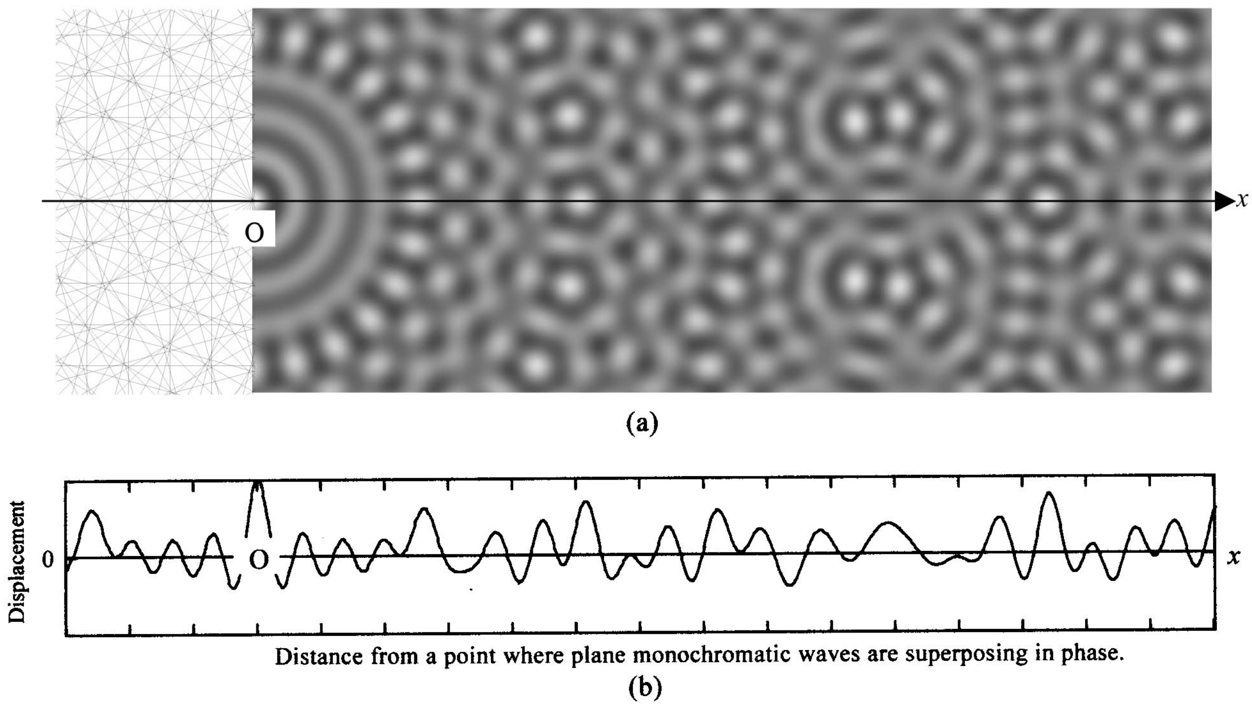
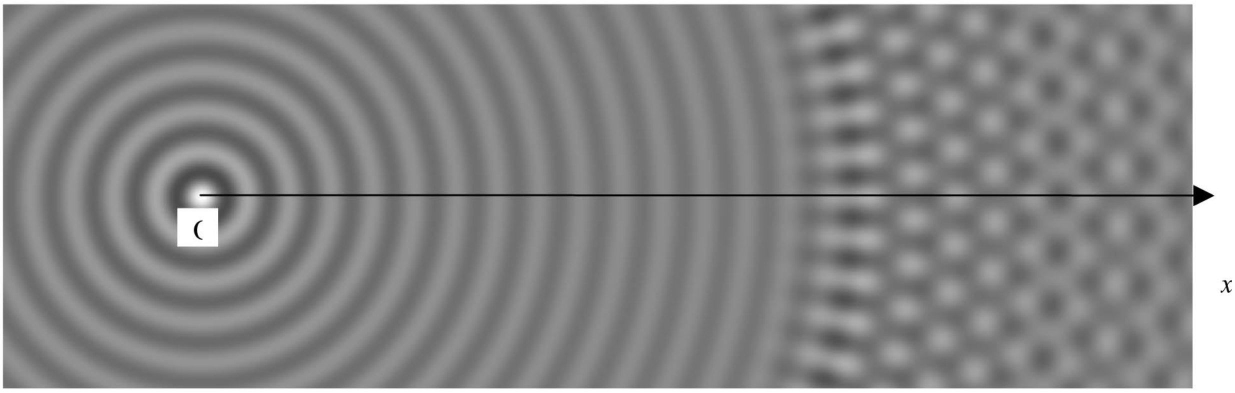


Fig.6 Wavefronts and displacement of waves when 24 plane, monochromatic waves traveling in different directions are superimposing. (b) Displacement of waves along x axis shown in (a).

の直線が交差するところ）で波は強め合い，明るくなる．

図 5(a)の左側の線画は点 O で，同じ位相で，互いに 30 度の角度をなして交差しあう 12 の平面単色波の波面を表し，右側の明暗図形は，そのときに現れる波の変位量を明暗の程度で表した結果である．図 5(b)は図 5(a)に示した直線 Ox 上の変位量である．図 6(a)の左側の線画は点 O で，同じ位相で，15 度の角度をなして交差しあう 24 の平面単色波の波面を表し，右側の明暗図形は，そのときに現れる波の変位量を明暗の程度で表した結果である．図 6(b)は図 6(a)に示した直線 Ox 上の変位量である．図 7(a) の明暗図形は点 O で，同じ位相で，互いに 3.75 度の角度をなして交差しあう 96 の平面単色波の変位量を明暗の程度で表した結果である．図 7(b)は図



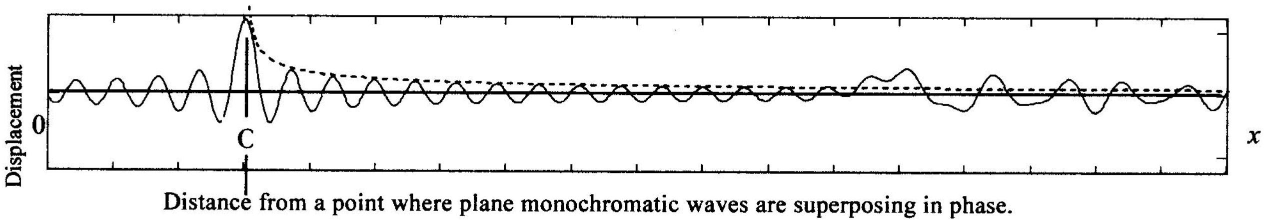


Fig.7 Wavefronts and displacement of waves when 96 plane, monochromatic waves traveling in different directions are superimposing. (b) Displacement of waves along x axis shown in (a). Dashed line shows the function $1/\sqrt{x}$.

7 (a)に示した直線Ox上の変位量である．

Fig. 4 (a)，5(a)，6(a)，7(a)を比較すると，重ね合わせる平面単色波の数が増えるにつれて，O 点を中心にした同心円状の明暗図形（変位量）が現れ，その範囲が重ねあわせる平面単色波の数の増加とともに広がっていくことが分かる．さらに，振幅はFig. 7(b)の破線で示したように点Oからの距離の平方根に反比例して減少していく．この変化は点Oを波源にする円筒波の特徴である．これらのことは，円筒波を，一平面内をありとあらゆる方向に進む平面波の集合として扱ってかまわないことを示す．

3． 結論

”観測点が遠くならば，点光源から出る球面波やスリットによる回折波が平面波（の集合）として扱える”――といったときの”観測点が遠くならば”という条件は，波が平面波（の集合）として扱える十分条件であって，必要条件ではない．遠くならば，…という条件は，平面波の集合がそれぞれの平面波に分離して観測できるための必要条件である．波の波面は伝わるにつれて平面波（の集合）で表される状態に変わっていくのではなく，もともと平面波の集合で表すことができ，伝わるにつれてそれぞれの平面波に分離していくということである．

付録Ⅰ 平面の回転によって作られる包絡面

Figure Aの(a)は原点から距離pにある直線（紙面に直交する平面）を示し，(b)はそれを，原点を中心にして紙面内で回転したときの図の重ねがきである．包絡線(面)が円形（円筒形）になることが分かり，円筒波を、一平面内を伝わる平面波の集合と考えてもよいことが分かる．

球面波があらゆる方向に伝わる平面波の集まりと同じであることを図で解き明かすには，平面である紙面あらゆる方向を向いた平面を重ね書きし、その包絡面が球面になることを示さなければならない．それはできないので，Fig. A から想像するか，数学的に扱う他ない．

ここでは，原点を中心に，平面を回転したときの包絡面を

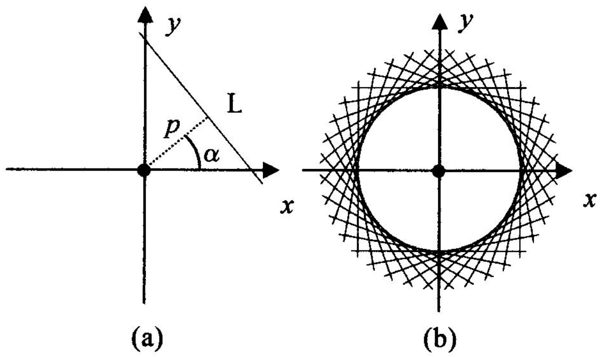


Fig. A (a) A plane and (b) Envelop when the plane shown in (a) is rotated around the origin.

数学的に求めることにする．

原点から一定の距離 p にある平面Pの方程式は

$$\alpha x+\beta y+\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}z=p \qquad \text{(A-1)}$$

である．ここで，α と β は平面の方向余弦である．

(A-1)式の両辺を α と β で偏微分し，0と置くと，

$$\frac{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}x-\alpha z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}=0 \quad \frac{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}y-\beta z}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}=0 \qquad \text{(A-2)}$$

となる．これらを連立させて，α と β で解くと

$$\alpha=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \qquad \text{(A-3)}$$

となる．これらを(A-1)に代入して，整理すると，

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=p \qquad \text{(A-4)}$$

となる．したがって，原点からの距離を一定に保って，原点を中心にして平面を回転したときの包絡面は球面になる．

付録II　原子から出る光

これまでの図解で，紙面に垂直な一直線を中心にした円筒波は，そのまま円筒波として扱っても，あるいは中心線上で，同じ位相で交差し，紙面内を進む多数の平面波の集合として扱ってもよいことが分かった．このことから，一点Oから出る球面波もそのまま球面波として扱っても，一点Oで，同じ位相で交差する多数の平面波の集合として扱ってもかまわないと考えられる．

こうした２通りの捉え方をつかって，原子から出る光の波面の形を検討しよう．

原子がエネルギーの高い状態から低い状態に遷移するときに，それぞれの原子は特有の振動数の光を出す．原子の大きさは，ほぼ 0.1nm の桁で，これは光の波長 500nm に比べて十分小さいから，原子はほぼ点といえる．したがって，光を古典的波動と見る立場では，原子から出る光は，雨滴が水面に同心円状の波を作るように，原子を中心にして球面状に広がる球面波になると考えるのが自然である．

一方，アインシュタインによれば，１つの原子がエネルギーの高い状態から低い状態に１回遷移するごとに，原子は一定のエネルギーと運動量を持った光（子）を１つだけ放出するという．その運動量は，光の波数を k，プランク定数を h として

$\mathbf{p}=\hbar\mathbf{k}$

で与えられる．運動量は方向を持ったベクトル量で，一回の遷移で光子を１つだけ放出することになると，**k** は特定の方向を向いた単一のベクトルでなければならない．**k** ベクトルが単一であることは，平面波を意味する．

原子が光を出すという１つの現象に対して，一方では球面波，他方では平面波というのでは，困る．この困難は次のようにして回避できる．*2

（１）原子が一回の遷移で放出する光は，球面波を平面波の集合として考えたときのいずれか１つの平面波である．球面波の振幅の方位依存性はそのうちのどれが実現しやすいかという確率を与える．（球面波の振幅はどの方向でも変わらないから，確率は一様である．）※2

（２）原子が何度も繰り返して遷移すれば，球面波の振幅の方位依存性で決まる確率に従って，ありとあらゆる方向に向かう平面波が発生し，どの方向からでも光を見る事ができる．

※2 この様子は，さいころを振ったときの様子とよく似ている．さいころを１回振ったとき出る目は，さいころの面に刻んだ数値のうちのいずれか１つである．さいころの面にどのように数値を割つけてあったのかということ(面ごとに違う数値を割り付けるとか，いくつかの面に同じ数値を重複して割り付けるとか)は，そのうちのどの目が出やすいかという確率を与える．

参考文献

1) 久保田　広：「波動光学」岩波書店　(1971) 9.
2) F. Hecht: Optics　3rd edition Addison Wesley Longman Inc (1998) 32.
3) 小林浩一：「光の物理」東京大学出版会　(2002) 第２章.