東海大学紀要工学部
Vol. 45, No. 2, 2005, pp.19-22.

波の重ね合わせの原理とエネルギー保存則

井上　薫*1，山﨑正之*2

Principle of Superposition of Waves and Energy Conservation Law

by

Kaoru INOUE*1 and Masayuki YAMAZAKI*2

(Received on September 27, 2005 & accepted on November 16, 2005)

Abstract

Some students in their study of wave motion have asked us "could you explain the contradiction that exists between the principles of superposition of waves and the energy conservation law?" We will answer the question in this paper. This question arises from their focusing only on either the constructive or destructive aspect of superposition of waves. They must pay attention to both aspects of superposition.

Keywords: Principle of superposition, Energy conservation law, Interference, Constructive superposition, Destructive superposition, Mach - Zehnder interferometer.

1. はじめに

物理現象の多くは時間的にも空間的にも変化している．こうした現象を研究したり利用したりするうえで，波の運動を理解しておくことが役に立つ．そのために，日本の生徒たちは高等学校の物理の授業で力学的エネルギーの保存則，波の表し方や波と波とが重なり合ったときに起こる干渉現象を習う[1~2]．彼らは大学に入ってから，波の持つエネルギーについて学ぶ[3~6]．こうした段階を踏んで波の運動を学習してきた彼らが持つ疑問の1つに，波の重ねあわせとエネルギー保存則との間に矛盾があるのではないかと言うことがある．この論文では，この素朴な疑問に答える．

2. 学生が持つ疑問

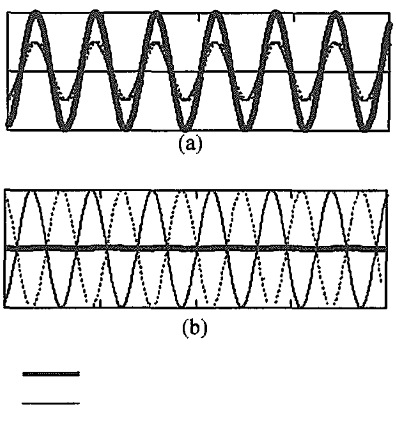

Fig.1. Superposition of two waves. (a)in phase and (b)out of phase.

*1 工学研究科光工学専攻修士課程
*2 工学部応用理学科光工学専攻教授

波のエネルギーは振幅の自乗で与えられる．従って振幅が a の波のエネルギーは a^2 になる．互いに等しい振幅 a の2つの波が分離して存在すれば，全エネルギーE は個々の波のエネルギーの和で

$$E = a^2 + a^2 = 2a^2 \tag{1.1}$$

になる．

一方，これら2つの波が互いに重なりあったときに現れる波は，重ね合わせの原理により個々の波の和で表せる．例えば，Fig1(a)のように，互いに等しい振幅 a の2つの波が位相差0度（山と山，谷と谷と）で重なり合えば，振幅 A は

$$A = a + a = 2a \tag{1.2}$$

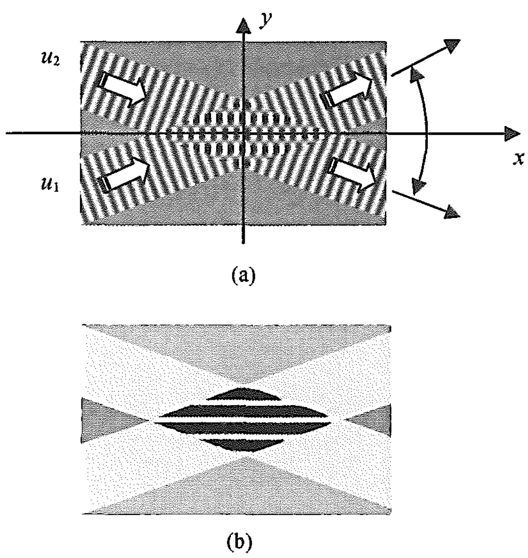

Fig.2. Superposition of two waves crossing. The brightness distribution in (a) shows magnitude of wave displacement and that in (b) shows magnitude of energy. The energy concentrates on bright bands.

になるので，全エネルギーEは

$$E = A^2 = (2a)^2 = 4a^2 \tag{1.3}$$

になるし，Fig1(b)に示すように，位相差180度（山と谷，谷と山と）で重なり合えば，振幅Aは

$$A = a - a = 0 \tag{1.4}$$

になり，全エネルギーEは

$$E = 0^2 = 0 \tag{1.5}$$

になる．

この例のように，2 つの波が分離して伝わっているときには全体のエネルギーが $2a^2$ であるのに対して，それらの波が互いに重なり合うと全体のエネルギーは $4a^2$ に増えたり，0になったりする．これがエネルギー保存則に抵触するのではないか——と言うのが，学生の疑問だ．

3. 議論

次式で表せる２つの平面単色波を例にして，矛盾しないことを説明しよう．

$$u_1 = a\exp[i(k\cos\theta\cdot x + k\sin\theta\cdot y - \omega t)] \tag{2.1}$$
$$u_2 = a\exp[i(k\cos\theta\cdot x - k\sin\theta\cdot y - \omega t)] \tag{2.2}$$

これらの波が重なり合った領域に現われる波をUとすると，重ねあわせの原理により，

$$\begin{aligned} U = u_1 + u_2 &= a\exp[i(k\cos\theta\cdot x + k\sin\theta\cdot y - \omega t)] \\ &+ a\exp[i(k\cos\theta\cdot x - k\sin\theta\cdot y - \omega t)] \\ &= 2a\cos(k\sin\theta\cdot y)\exp i(k\cos\theta\cdot x - \omega t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

となり，振幅は

$$A = 2a\cos(k\sin\theta\cdot y) \tag{2.4}$$

となり、波のエネルギーEは

$$E = [2a\cos(k\sin\theta\cdot y)]^2 \tag{2.5}$$

となる．波の変位量とエネルギーの大きさを明暗の変化に変え

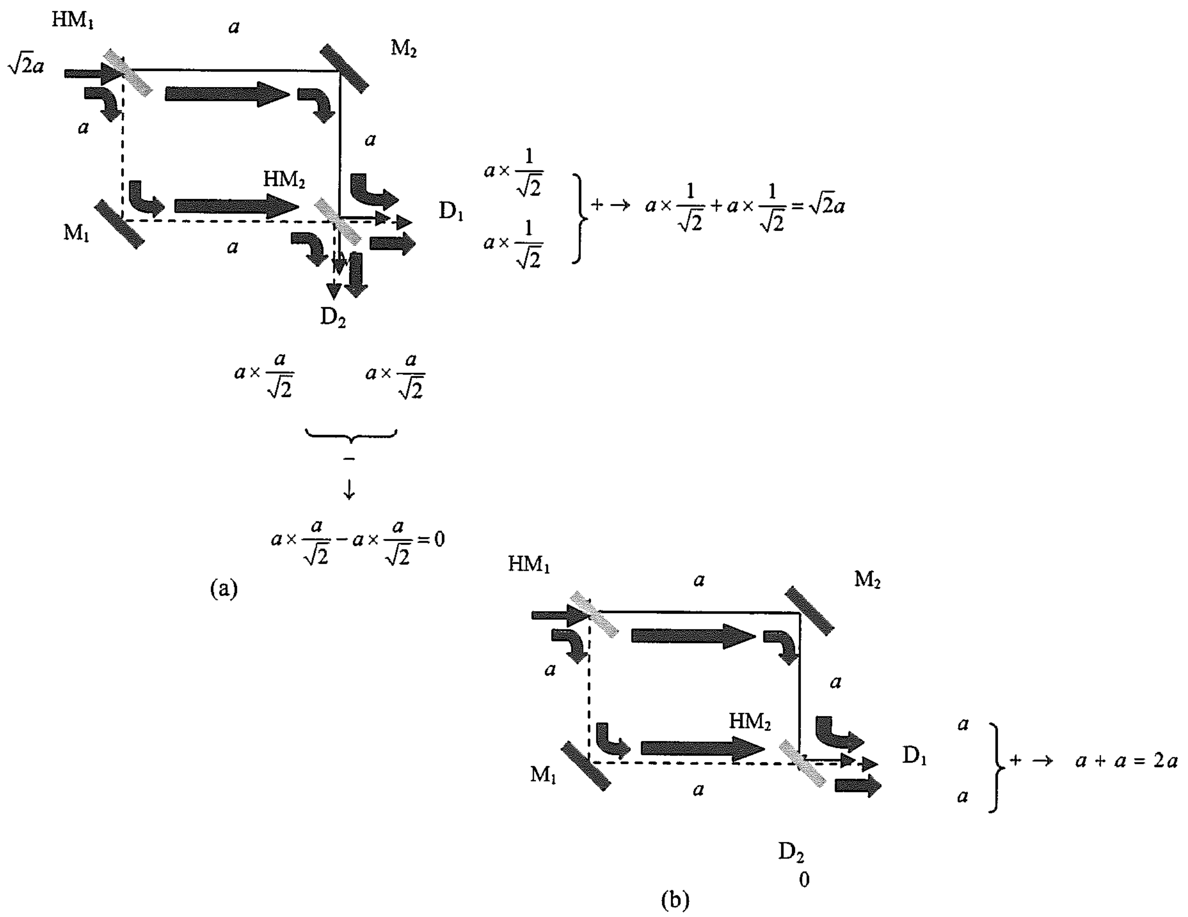

Fig.3. Mach-Zhender interferometer. A wave of amplitude $\sqrt{2}a$ is divided into two waves of equal amplitude a by the HM_1. (a) True. The wave incident on HM_2 from upside as well as left side is divided two waves of equal amplitude $a/\sqrt{2}$. (b) False. The wave incident on HM_2 from upside is 100% reflected and the wave incident on HM_2 from left side is 100% transmitted.

て表わした結果をそれぞれ Fig.2(a)と(b) に示す.
x 軸に平行な直線群

$$k\sin\theta y = 0, \pm\pi, \pm 2\pi .... \pm n\pi (n = \text{integer}) \tag{2.6}$$

に沿って振幅 $2a$ の波が左方から右方へ進み,エネルギーが大きくなる.

一方, x 軸に平行な直線群

$$k\sin\theta y = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \tag{2.6}$$

上では波は消失し，振幅は０になり，エネルギーも０になる．この様に，波と波とが重なり合うと，強め合って振幅が大きくなる領域と弱めあって振幅が小さくなる領域とがいつも一対になって現われる．学生の疑問は強めあう重ねあわせだけに注目し，弱めあう重ねあわせに注意しないために生じる．強めあう領域のエネルギーが大きくなるのは，弱めあっている領域からエネルギーが移動しているからである．強めあう領域と弱めあう領域とを同時に考えれば，エネルギーは増えても減ってもいないことが分かる．

さて，全く同じ方向に進む２つの波が重なった場合はどうだろう．そのときには， $2\theta = 0$ になるから，波の変位量は

$$u_1 = 2a\exp i(kx - \omega t) \tag{2.7}$$

となり、エネルギーは

$$E = (2a)^2 = 4a^2 \tag{2.8}$$

になる．そうすると，強め合う領域だけが現れ、弱めあう領域が消え失せてしまう。強め合う領域と弱めあう領域を同時に考えれば矛盾しないといわれても弱め合う領域がないのだから、こうした場合にはエネルギー保存則を満たさないのではないかという疑問が再び頭を持ち上げる．この疑問に答えるには $2\theta = 0$ となるように２つの波を重ね合わせるにはどのような実験をしたらよいのか考えなければならない．それには Fig.3 に示した波動観測装置を使えばよい．ここで HM_1 と HM_2 は，それぞれそこに入ってきた波を互いにエネルギーの等しい２つの波に分ける素子（光学の分野ではハーフミラーと呼ぶ)，M_1 と M_2 は、それぞれそこに入射した波のエネルギーを全て反射する素子（光学の分野ではミラーと呼ぶ）である．この装置は光学の分野では，マッハ・ツェンダー干渉計として知られている．波が伝わる $HM_1 \to M_1 \to HM_2$ の道のりと $HM_1 \to M_2 \to HM_2$ の道のりの差を調整すると，波が D_1 の側だけに現れ，D_2 の側には現れないようにできる．

こうした調整をしたこの装置に，振幅 $\sqrt{2}a$ の波が入射したとしよう．波は HM_1 で振幅が a の２つの波に分かれる．分かれた波はそれぞれ $HM_1 \to M_1 \to HM_2$ と $HM_1 \to M_2 \to HM_2$ を伝わり HM_2 で再会する．

さて，HM_2 でそれぞれの波がどのように反射したり透過したりするのか考えよう．D_2 の側には波は現れないので，振幅は０だ．しかし，振幅が０だということは，波が初めから存在していなかったということとは異なる．振幅が０になるのは，Fig.3(a)に示したように $HM_1 \to M_1 \to HM_2$ をたどってきた波の一部が HM_2 で反射し，$HM_1 \to M_2 \to HM$ をたどってきた波の一部が HM_2 を透過し，それらが互いに打ち消しあう状態（山と谷，谷と山）で重なり合っているからだと考えなければならない．こう考えれば，入ってくるときの波のエネルギーと出て行くときの波のエネルギーには変化が無く，エネルギー保存則に抵触することも無い．

学生諸君の疑問は，Fig3.(b)に示したように，D_1 の側では波が観測されるが D_2 の側では波は観測されないのだから，道筋 $HM_1 \to M_1 \to HM_2$ をたどってきた波は反射することなく全て D_1 の側に透過し，道筋 $HM_1 \to M_2 \to HM_2$ をたどってきた波は透過することなくことなく全て D_1 の側に反射をする―――と考えてしまうことが原因になっている．そう考えてしまうと，D_1 の側では波の振幅は $2a$（$= a + a$）で，エネルギーは $4a^2$ になり，D_2 の側では波の振幅は０で，エネルギーも０になる．入るときの波のエネルギーが $2a^2$ であるのに対して，出て行くときの波のエネルギーは $4a^2 + 0$ になり，波を２つに分け，伝わらせ，再び重ね合わせる操作だけでエネルギーは２倍に増え，エネルギー保存則に抵触してしまうことになる．

4.　おわりに

多くの学生が，波の重ね合わせの原理とエネルギー保存則との間に矛盾があるのではという疑問を持っている．この疑問が生じるのは，波と波とが重なり合ったとき，エネルギーの大きくなる領域と小さくなる領域とが一対になって現れることや，強め合う状態だけ（あるいは弱めあう状態だけ）が作り出せると思い込んでいることにある．波と波を重ね合わせて強め合う状態だけを作り出すとか，弱めあう状態だけを作り出すことは出来ない．強め合う状態を作り出すと，その裏で弱めあう状態も現れている．強めあう状態では波が見えても、弱めあう状態の方では波が見えないので，弱めあう方は考えなくてもよいと早合点してしまうから矛盾があるように思えるのである．

付録

A.太陽光線を虫眼鏡で集める

虫眼鏡(凸レンズ)を使って太陽光線を黒紙の上に集めると，黒紙が焦げだすことは多くの人が経験している．この現象はレンズ面に入射した太陽光のエネルギーがレンズで小さい焦点に集められるので，エネルギー密度が大きくなる結果だとして，私たちは自然に納得してしまう．

この現象も，光束の周辺部のエネルギーが干渉によって特定の場所（焦点）に集められたからであると考えられる [7]．

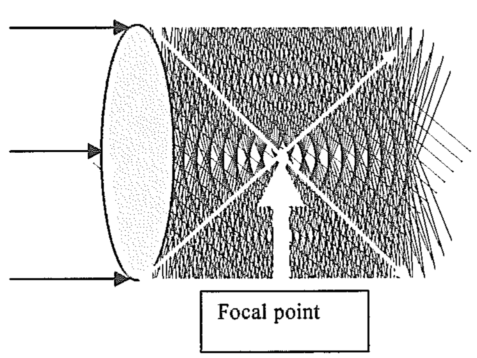

Fig.1A Superposition of plane waves. Many plane waves superimpose in phase at the focal plane of the lens.

Figure 2 に示したように，2つの平面単色波が互いに交差すると，等振幅線群は交差角を2等分する方向に沿い，それらの間隔は交差角が大きくなるにつれて狭くなった．このため，いろいろな方向に進む多数の平面単色波が特定の場所（焦点）で強めあうように重なると，焦点以外の場所では互いに打ち消しあうことになる．この様子を Fig.1A に示す．

参考文献

1) 斉藤晴男，兵頭申一編　「物理ＩＢ」　啓林館　（平成７年）．
2) 大槻義彦，小牧研一郎，長岡洋介，原康夫　「物理ＩＢ」　実教出版　（平成８年）．
3) 山崎正之，若木守明，陳　軍　「波動光学入門」　実教出版 (2004).
4) 神谷芳弘　「振動・波動」　サイエンス社（昭和 61 年）．
5) 和田純夫　「振動・波動のききどころ」 岩波書店 (1995)．

Fig.1A Superposition of plane waves. Many plane waves superimpose in phase at the focal point of the lens.

東海大学紀要工学部 43,(2003) 5.