

陽的差分解法による一次元圧密計算法の問題点

白子博明^{*1}・五十嵐大地^{*2}・杉山太宏^{*3}・赤石 勝^{*4}

Problem of one-dimensional consolidation involving secondary compression by explicit finite difference method

by

Hiroaki SHIRAKO, Daichi IGARASHI, Motohiro SUGIYAMA and Masaru AKAISHI

(Received on 30 Sep., 2005 & accepted on 14 Jan., 2006)

Abstract

In this paper, we examine the applicability of the explicit finite difference method for one-dimensional consolidation analysis, taking into account secondary compression and time-dependent loading. It is shown that the consolidation time curve of clays is affected by the size of the time increment and that the problem of similitude for the consolidation of clays exhibiting secondary compression depends not only on the constitutive equation of clay but also on the numerical solution.

Keywords: one-dimensional consolidation, secondary compression, time-dependent loading, explicit finite difference method

1. 諸 言

Terzaghi の圧密理論では応力ひずみ関係を線形（弾性体）と仮定しているため、圧密度 100%以降も継続する二次圧密沈下を説明できない。Terzaghi 理論の発表直後から、二次圧密を含んだ一次元圧密理論がいくつも報告されてきた¹⁾。このうち、最大排水距離の異なる粘土の圧密度-時間関係は、平行移動型とアイソタッチ型 2 種類の仮説に分類され、この仮説を説明するために多くの研究が行われている^{2),3)}。それぞれの仮説を実験的に検証するためには、長期間に亘る精度の高い圧密試験が必要である⁴⁾。したがって、研究の多くは土の構成式に関するもので、二次圧密を時間の対数として表現する log(t)型と間隙比速度を利用する構成式に大別される。ただし、提案された構成式を用いて、実際の現場において観測された圧密度-時間関係の再現計算法を詳述したものは少ない⁵⁾。精緻な構成式を地層構成の複雑な現場の一次元圧密解析に利用するには、高速コンピューターを用いた精度の高い数値解析が必要であるが、実務的な設計計算から見れば、限られた調査から決定される地層構成、土質諸定数との精度面のバランスも重要である。

ところで、一次元圧密の数値解析法として多くの教科書に陽的差分解法が紹介されている⁶⁾⁻⁸⁾。多次元圧密解析には有限要素法を利用するが、一次元圧密解析では計算の簡単な差分解法が好まれるようである。しかし、二次圧密のような時間依存性の構成式を用いた陽的差分解法の適用性については十分調べられていないと思われる⁹⁾。一次元圧密における粘土の圧密度-時間関係は、構成式だけでなく数値計算法によっても影響を受ける可能性がある⁹⁾。

この論文は、陽的差分解法を用いた一次元圧密解析の問題点について検討している。最大排水距離の異なる均質な粘土地盤を仮定して、漸増荷重条件と簡単な二次圧密モデルを用いた瞬間荷重条件で数値計算を行った。最大排水距離の異なる粘土の一次元圧密において、圧密度-時間関係に及ぼす計算条件（圧密層の分割数=格子点間隔数）の影響について考察する。

2. 陽的差分解法による一次元圧密解析

2.1 一次元圧密方程式

(1) 二次圧密を含まない一次元圧密方程式（漸増荷重）

漸増荷重による一次元圧密解析を、間隙水圧とひずみに関する圧密方程式、それぞれ式(1)と式(2)を用いて検討する¹⁰⁾。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} \quad (2)$$

ここに、 u は過剰間隙水圧、 ε はひずみ、 t は時間、 y は位置、 σ は圧密荷重、 c_v は圧密係数である。

式(2)は圧密荷重一定という仮定を必要としないため、圧密荷重が変化する場合にも成立する。また、漸増荷重の問題は、排水境界におけるひずみを時間とともに増加させればよいことが知られている¹⁰⁾。式(1)と式(2)は、陽的差分によってそれぞれ式(3)と式(4)で表される。

$$u_{y,t+\Delta t} = u_{y,t} + M(u_{y+\Delta y,t} - 2u_{y,t} + u_{y-\Delta y,t}) + \sigma_{y,t+\Delta t} - \sigma_{y,t} \quad (3)$$

$$\varepsilon_{y,t+\Delta t} = \varepsilon_{y,t} + M(\varepsilon_{y+\Delta y,t} - 2\varepsilon_{y,t} + \varepsilon_{y-\Delta y,t}) \quad (4)$$

ここに、 $M = c_v \Delta t / \Delta y^2 \leq 1/2$ 、 Δy は格子点間隔である。

*1 (株)建設企画コンサルタント東京事業本部副本部長
*2 東海大学大学院工学研究科土木工学専攻
*3 東海大学工学部土木工学科助教授
*4 東海大学工学部土木工学科教授

式(3)と式(4)では、現場や室内試験において観察されるいわゆる二次圧密を考慮していない。したがって、係数 M を $1/2$ 以下とすれば、圧密層の分割数に関わらず同じ計算結果が得られる。本研究では、後述するように漸増荷重を対数時間に比例させる荷重方法を採用し、次項で詳述する二次圧密を考慮した計算結果と比較するとともに、格子点間隔数の影響について検討する。

(2) 二次圧密を考慮した一次元圧密方程式 (瞬間荷重)

一次圧密中の二次圧密を考慮した一次元圧密解析では、正規圧密飽和粘土の圧密量 (体積ひずみ) $\Delta\varepsilon$ を式(5)で表す。

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= m_p \Delta\sigma' + \frac{0.434\alpha}{t} \Delta t \\ &= \Delta\varepsilon_p + \Delta\varepsilon_s \end{aligned} \quad (5)$$

ここに、 m_p は一次圧密に対する体積圧縮係数、 σ' は有効応力、 α は体積ひずみで定義した二次圧密係数、 t は圧密層内各点の圧密開始後の経過時間である。また、この報告では、式(5) 右辺第一項の有効応力変化に伴う体積ひずみ $\Delta\varepsilon_p$ を一次圧密量、式(5)右辺第二項の圧密経過時間の対数に比例する体積ひずみ $\Delta\varepsilon_s$ を二次圧密量と呼ぶ。この簡単な二次圧密モデルでは、荷重圧密前から生じている二次圧密を無視している。その影響は本報告の検討対象でなく、検討結果に無関係なためである。

式(5)右辺第二項において二次圧密速度 $m_s=0.434\alpha/t$ とおき、間隙水圧に関する一次元圧密方程式から式(6)が得られる ($\partial\sigma/\partial t=0$)。また、この差分表示は式(7)となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{m_s}{m_p} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} u_{y,t+\Delta t} &= u_{y,t} + M(u_{y+\Delta y,t} - 2u_{y,t} + u_{y-\Delta y,t}) \\ &\quad + m_s \Delta t / m_p \end{aligned} \quad (7)$$

2.2 数値解析の諸条件

式(3)、(4)、(7)を用いた一次元圧密解析の初期条件と境界条件は、最大排水距離 H ならびに全圧密量による通常の体積圧縮係数 m_v として以下を採用した。

初期条件:

式(3)と式(7); $u(0 < y \leq H, t=0) = u_0 (= \Delta\sigma)$

式(4); $\varepsilon(0 < y \leq H, t=0) = 0$

境界条件:

式(3)と式(7); $u(y=0, t > 0) = 0$

$\partial u / \partial y (y=H, t > 0) = 0$

式(4); $\partial \varepsilon / \partial y (y=H, t > 0) = 0$

$\varepsilon(y=0, t > 0) = m_v \Delta\sigma'$

また、荷重条件は漸増荷重と瞬間荷重で、それぞれ以下のように条件を設定した。

漸増荷重条件(1): 定率漸増荷重である。R.E.Olson の厳密解¹¹⁾と計算結果の比較により、本報告で利用するプログラムのチェックを実施する。

漸増荷重条件(2): 荷重増分が、時間の対数に比例する荷重条件 ($\Delta\sigma = 98.1(0.5 + 0.1 \cdot \log(t/t_0))$: kPa) を採用した。当然であるが、実際にこのような荷重条件はあり得ない。非現実的な条件を採用した目的は、二次圧密を考慮した計算と比較するためである。この荷重条件では m_v を $(0.1/98.1)$ kPa⁻¹ に設定すると、排

水面に接する土要素の体積ひずみ増分は式(8)で表される。

$$\Delta\varepsilon = m_v \Delta\sigma' = 0.05 + 0.01 \cdot \log(t/t_0) \quad (8)$$

式(8)の t_0 は、係数 $M = c_v \Delta t / \Delta y^2 \leq 1/2$ から求まる差分計算の時間増分 Δt に等しいとした。

瞬間荷重条件: 二次圧密を考慮した式(7)によって、荷重増分 $\Delta\sigma = 98.1$ kPa の差分計算を行った。 $m_p = (0.05/98.1)$ kPa⁻¹、二次圧密係数 $\alpha = 0.01$ に設定すると、排水面に接する土要素の体積ひずみの経時変化は式(9)で表される。

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= m_p \Delta\sigma' + \alpha \log(t/t_i) \\ &= 0.05 + 0.01 \cdot \log(t/t_i) \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)の t_i も式(8)の t_0 と同じく、差分計算の時間増分 Δt に等しいと仮定した。

式(8)は漸増荷重で一次圧密のみ、式(9)は瞬間荷重で二次圧密を考慮している。本研究では、上述したように両者を比較するための計算条件として、排水面土要素の体積ひずみの経時変化が等しくなるように設定した。また、全ての計算で圧密係数 $c_v = 0.1$ cm²/min を用いた。

3. 計算結果と考察

3.1 漸増荷重条件

(1) 定率漸増荷重

水圧とひずみに関する一次元圧密方程式により、排水距離 $H=1$ cm、格子点間隔数 $NG=20$ (格子点間隔 $\Delta y=0.05$ cm) とした計算により得られた圧密度 U と時間係数 T_v の関係を Fig.1 に示した。時間係数 $T_c=0$ と 0.2 は、それぞれ瞬間荷重と定率漸増荷重に対応する。Terzaghi (瞬間荷重 $T_c=0$) と Olson (定率漸増荷重 $T_c=0.2$) の厳密解による計算結果を図中実線で示した。図中白丸と黒丸が、水圧とひずみに関する一次元圧密方程式(3)と(4)による計算結果である。瞬間荷重、定率漸増荷重ともに厳密解とよく合う結果が得られている。

定率漸増荷重で、最大排水距離 H が異なる場合の圧密度-時間曲線が Fig.2 である。 $H=1$ cm と $H=4$ cm として、時間係数 $T_c = 0.848$ まで定率漸増荷重させた。 $H=4$ cm では、格子点間隔数 NG が $H=1$ cm と同じ場合 ($NG=20$ ($\Delta y=0.2$ cm)) と、格子点間隔 Δy が $H=1$ cm と同じ場合 ($NG=80$ ($\Delta y=0.05$ cm)) で計算し比較

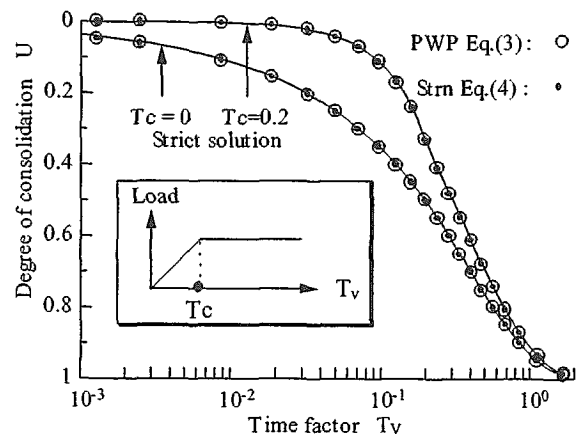


Fig.1 Comparison of the strict solutions with the calculated results by equation(3) and equation(4) with primary consolidation

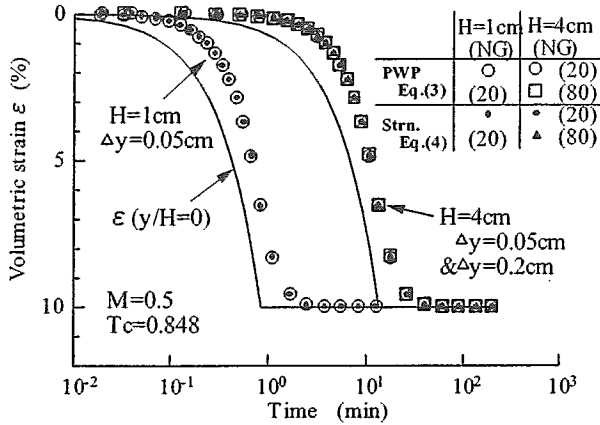


Fig.2 Comparison of the consolidation-time curves due to constant time dependent loading with primary consolidation

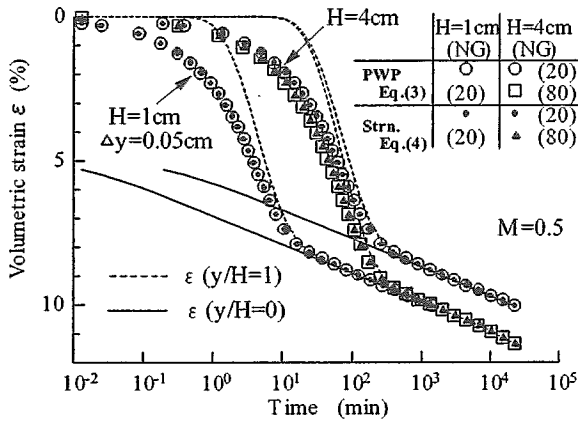


Fig.3 Comparison of the consolidation-time curves due to the time dependent loading of proportion at logarithmic time

している。H=4cmではH²則に従う計算結果が得られたが、格子点間隔数や圧密方程式には影響されず同じ結果となっている。この後の検討と比較から、図中に実線で示した排水面(y/H=0)に接する格子点の圧密量の経時変化が注目される。

これらの計算結果を圧密度時間係数の関係に変換すると、R.E.Olsonの厳密解と一致する。定率漸増荷重における一次元圧密の差分計算には、全く問題のないことが確認された。

(2) 時間の対数に比例する漸増荷重

最大排水距離H=1cmとH=4cmで、時間の対数に比例する漸増荷重条件式(8)によって計算した圧密度-時間曲線がFig.3である。Fig.1と同様、白丸と黒丸が、それぞれ水圧とひずみの圧密方程式による計算結果である。時間の対数に比例する漸増荷重のため、二次圧密と類似した圧密挙動が計算されている。

H=4cmにおいてH=1cmと同じ格子点間隔数NG=20で計算した場合、最大排水距離の異なる圧密層の平均圧密度-時間曲線は平行移動型である。H=4cmのNGを80に増加させて、H=1cmの格子点間隔Δy=0.05cmと等しくした計算結果が白四角と黒三角である。最大排水距離が変わっても格子点間隔Δyを等しくすると、圧密層の平均圧密度-時間曲線はアイソタッチ型となる。

白黒記号で区別した水圧とひずみの圧密方程式によるFig.3の計算結果は、すべてにおいて互いによく一致したが、計算条件すなわち格子点間隔数には影響される。また、点線と一点鎖

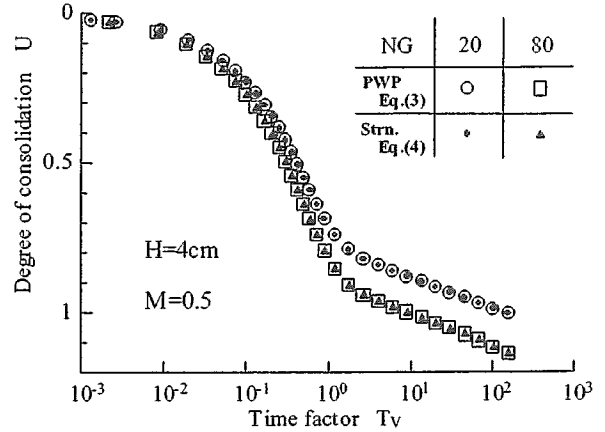


Fig.4 Relationship between degree of consolidation and time factor due to the time dependent loading of proportion at logarithmic time

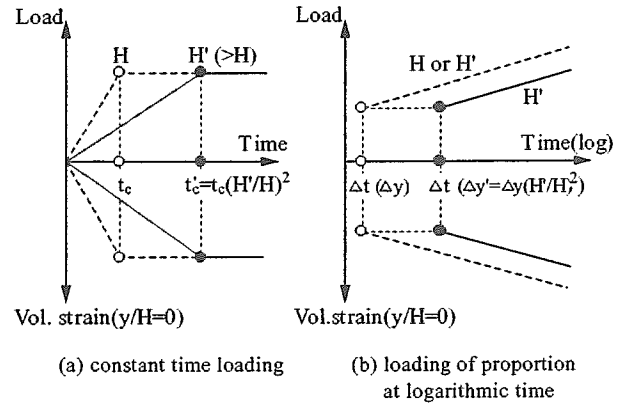


Fig.5 Difference of time dependent loading

線で示した排水面と非排水面における土要素の圧密度は、二次圧密領域で等しくなる。したがって、時間の対数に比例する漸増荷重では、ある時間経過以降、圧密層内全点の圧密度-時間曲線がほぼ一つの線上に収束していると考えられる。

Fig.3に示したH=4cmの圧密度-時間曲線を圧密度Uと時間係数Tvに変換したのがFig.4である。最大排水距離が変化しても、格子点間隔数NG=20で計算した白丸と黒丸の計算結果は平行移動型であるため、U-Tv関係は完全に重なっている。一方、アイソタッチ型の計算結果となるNG=80とした計算結果(白四角と黒三角)は、NG=20と同じ時間係数でも圧密度あるいは圧密度が大きくなる。

本項で比較した漸増荷重条件の荷重と排水面における体積ひずみの模式図をFig.5に示した。排水距離Hが大きな場合の定率漸増荷重では、Fig.5(a)のように最終荷重までの所要荷重時間tcを排水距離の二乗に比例させている。二次圧密を考慮していないため、最終荷重到達以降の排水面における体積ひずみは、当然ながら排水距離によらず一定である。

時間の対数に比例する漸増荷重では、Fig.5(b)のように格子点間隔数NGすなわち格子点間隔Δyの取り方によって荷重の発生時間Δt, Δt'が決まる。したがって、排水面の体積ひずみは、ΔtあるいはΔt'時間後、つまり荷重直後から時間の対数に比例して発生する。Fig.5(b)の破線はFig.2からFig.4に示したH=1cmとH=4cmのΔy=0.05cm、実線はH=4cmのΔy=0.2cmにそれぞれ対応する。

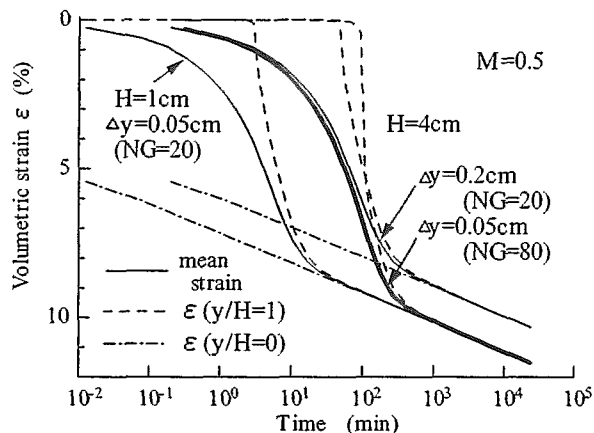


Fig.6 Calculated results of consolidation time curves including secondary compression

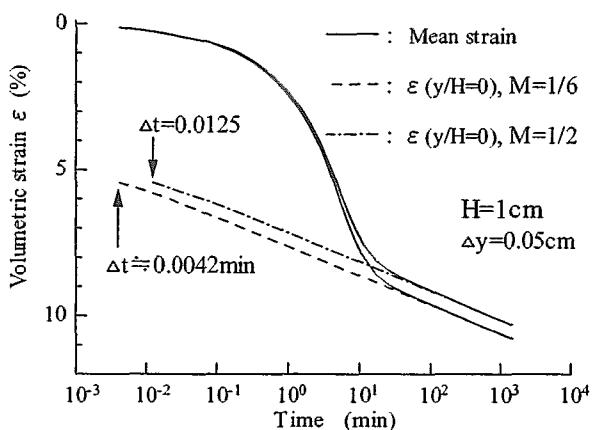


Fig.7 Influence a stability factor, M, affects the results of consolidation time curves including secondary compression

3.2 瞬間荷条件 (二次圧密モデル)

式(5)の二次圧密モデルによって最大排水距離 $H=1\text{cm}$ と $H=4\text{cm}$ で計算した圧密量-時間曲線が図-6である。

最大排水距離によらず差分計算の格子点間隔数 NG を 20 とし計算した平均圧密量-時間曲線 (細実線) は、平行移動型である。格子点間隔 Δy が $H=1\text{cm}$ と等しくなるように $NG=80$ とした $H=4\text{cm}$ では (太実線)、アイソタッチ型となっている。二次圧密を含む一次元圧密解析において、最大排水距離が異なる圧密層の圧密量-時間曲線は格子点間隔 Δy の影響を受ける、あるいは差分計算の時間増分 Δt と等しく仮定した二次圧密が発生する時間 t_0 の影響を受ける、ことがわかる。

Fig.6 の二次圧密を考慮した一次元圧密解析における平均圧密量-時間曲線は、時間に比例する漸増荷の結果 (Fig.3) とほぼ等しい。一次圧密のみを対象とした漸増荷における圧密層内各点の圧密量が、二次圧密領域でほぼ等しくなるのは当然の計算結果と考えられるが、式(5)の二次圧密モデルでも同じ結果を示すことは興味深い。排水面から距離に応じて圧密の開始時間は遅れても、圧密時間のみの関数と仮定した二次圧密モデル式(5)では、圧密開始時間の遅れがその後の圧密量-時間曲線にほとんど影響しないことを意味している。

Fig.6 では格子点間隔 Δy の影響を比較した。1/2 以下とされる解の安定条件 M の値を小さくすると結果として時間増分 Δt が小さくなる。二次圧密を含む一次元圧密解析の圧密量-時間

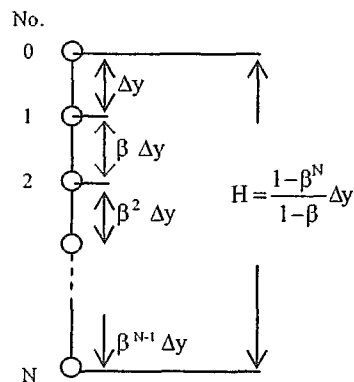


Fig.8 Change of nodal point interval used by method "A"

曲線は、 M にも影響される可能性がある。そこで、 M の値を 1/2 と 1/6 に設定し、二次圧密を考慮した圧密量-時間曲線を $H=1\text{cm}$ で比較したのが Fig.7 である。平均体積ひずみは M の大きさによって異なり、 $M=1/2$ よりも $M=1/6$ ($\Delta t \cong 0.0042\text{min}$) として早くから二次圧密を発生させた場合のひずみ量が多い。破線と一点鎖線で表した排水面のひずみは、時間増分 Δt 以降、時間の対数に比例して増加し、圧密層内全点の圧密量はその線上に収束している。したがって、 M の大小が圧密量-時間曲線に影響することは明らかである。

3.3 漸増荷条件による演算時間の検討

陽的差分解法によってアイソタッチ型の圧密量-時間曲線を得るために、格子点間隔数 NG を増加させると演算時間が極端に増加する。実地盤の最大排水距離では、演算結果を得ることが困難になる程、演算時間が増大する可能性がある。そこで、ひずみの圧密方程式(4)により、時間の対数に比例する漸増荷条件の演算時間を減少させる2つの方法について検討する。

(1) 方法A

方法Aは、最大排水距離が増加しても、排水面に接する格子点が代表する圧密層の厚さは等しくして、圧密層内部の格子点間隔を Fig.8 のように変化させる方法である。図中に記した H と Δy の関係式において係数 β を 1 とすれば、均等格子点間隔になる。係数 β を 1 よりも大きくすれば、排水距離の増加による格子点間隔数の増加を低減し、演算時間を短縮することが可能となる。

Fig.9 は、 $\beta > 1$ として最大排水距離 $H=2, 4, 8\text{cm}$ で計算した圧密量-時間曲線である。格子点間隔数 NG をすべて 10 とし H ごとに β を計算した。 $\beta > 1$ とした不均等格子点間隔の計算結果を記号で、これと比較するため均等格子点間隔 ($\Delta y=0.1\text{cm}$) で行った計算結果を実線と破線等で示している。また、排水面に接する圧密層の厚さは、 $\Delta y/2=0.05\text{cm}$ とした。最大排水距離の増加に伴い、 $\beta > 1$ とした計算結果と均等格子点間隔の計算結果には、かなり大きな差が生じている。

Fig.9 すべての条件について、計算に要した演算時間を調べたのが Fig.10 である。今回の差分計算には、CPU1.4 MHz, 256MB メモリのパソコンを使用している。Fig.10 に白丸で示した均等格子点間隔の場合、 H の増加による格子点間隔数 NG の増加によって、演算時間は著しく増加する。 $\beta > 1$ を採用した方法Aでは、演算時間をかなり減少できるが、計算精度は低下することになる。

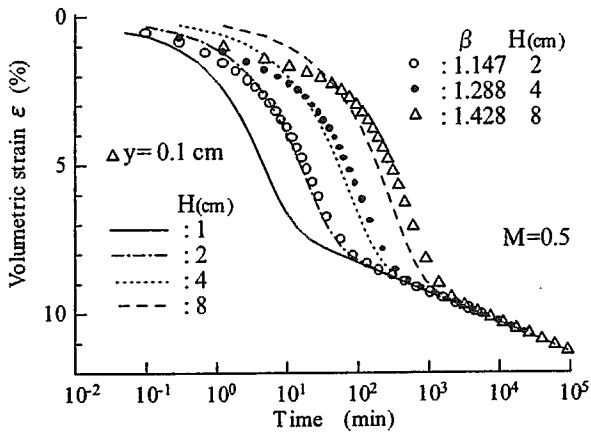


Fig.9 Consolidation-time curves due to the time dependent loading of proportion at logarithmic time used by method "A"

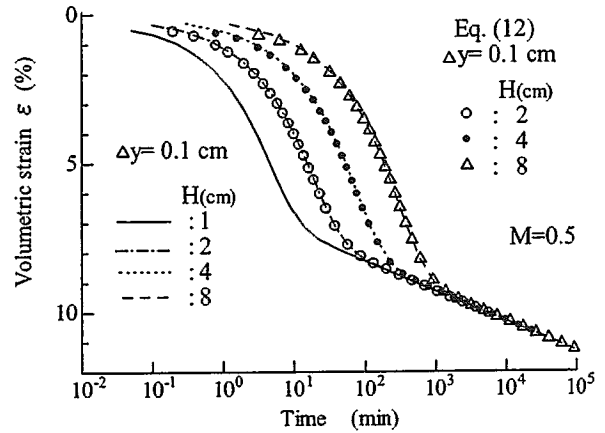


Fig.11 Consolidation-time curves due to the time dependent loading of proportion at logarithmic time used by method "B"

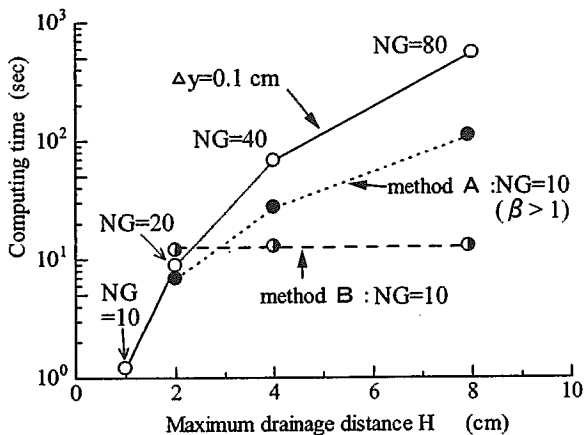


Fig.10 Comparisons of computing time

(2) 方法B

この方法は、排水距離が大きな場合にも標準圧密試験を想定した最大排水距離 $H=1$ cm の計算と同じ格子点数で、均等格子点間隔によって計算する方法である。ただし、このままでは Fig.3 に示したような平行移動型の圧密量-時間曲線になるため、以下のようにして時間増分を設定した。

最大排水距離 $H=1$ cm の格子点間隔 Δy 、時間増分 Δt とする。排水面に接する格子点が代表する圧密層のひずみ増分 $\Delta \epsilon$ ($y=0$) は、式(8)に基づいて式(10)で計算する。

$$\Delta \epsilon(y=0) = m_p \Delta \sigma' + \alpha \log(t / \Delta t) \quad (10)$$

最大排水距離の異なる圧密層の均等格子点間隔を Δy_f 、時間増分を Δt_f とし、 $H=1$ cm の Δy と Δt から時間増分 Δt_f を式(11)により求める。また、この時の排水面に接する格子点の体積ひずみ増分は、式(12)で表される。

$$\Delta t_f = \Delta t (\Delta y_f / \Delta y)^2 \quad (11)$$

$$\Delta \epsilon(y=0) = m_p \Delta \sigma' + \alpha \log(\Delta t_f / \Delta t) + \alpha \log(t / \Delta t_f) \quad (12)$$

式(12)によって、Fig.9 と同じように最大排水距離の異なる圧密量-時間曲線を計算した結果が Fig.11 である。均等格子点間隔

隔を採用した方法Bでは、 $\Delta y = 0.1$ cm として格子点間隔数が増加する実線や破線の結果とほとんど一致し、不均等格子点間隔の方法A (Fig.9) よりも正確な結果を得られることが明らかである。方法Bの計算に要した演算時間は、Fig.10 に示したように最大排水距離によらず一定で、 $H=8$ cm では $\Delta y = 0.1$ cm の 1/50、方法Aの 1/10 まで短縮できることがわかる。

5. 結言

陽的差分法による漸増载荷と二次圧密を考慮した一次元圧密解析法の問題点について検討した。格子点間隔あるいは時間増分の取り方によって、最大排水距離の異なる土の圧密量-時間曲線は、平行移動型、アイソタッチ型のいずれの計算結果も得られることを示した。式(5)に示した簡単な二次圧密モデルでも、時間増分の取り方によって、網干の相似則に関する一次元圧密試験結果に類似した計算結果を得ることも可能でもある。

しかし、陽的差分法によって計算する圧密量-時間曲線がアイソタッチ型となるためには、最大排水距離の異なる土の圧密層の分割長を等しくする必要があり、格子点間隔数の増加とともに演算時間が著しく増大するという問題点が発生する。また、層厚の大きな実際の地盤の二次圧密を含む一次元圧密解析にアイソタッチ型の二次圧密モデルを採用しても、計算方法次第で平行移動型になる可能性があることは、注意すべき問題点である。

参考文献

- 1) 最上武雄編：土質力学，技報堂，pp.431-442，1969.
- 2) Ladd, C.C. et al.: Stress-deformation and strength Characteristics, Proc. 9th ICSMFE, Vol.2, pp.421-494, Tokyo, 1977.
- 3) Leroueil, S., Kabbaj, M., Tavenas, F., and Bouchard, R.: Stress-strain-strain rate relation for the compressibility of sensitive natural clays, Geotechnique, 35, No.2, pp.159-180, 1985.
- 4) Aboshi, H.: An experimental investigation on the similitude of consolidation of clay including the creep settlement, Proc. 8th ICSMFE, Vol.4(3), pp.88, Moscow, 1973.
- 5) Desai, C.S. and Christian, J.T.: Numerical Methods in Geotechnical Engineering, McGraw-Hill Co., pp.364-377, 1977.
- 6) Scott, R.F.: Principles of Soil Mechanics, Addison-Wesley

- Publishing Co., pp.206-218, 1963.
- 7) Harr, M.E. : Foundation of Theoretical Soil Mechanics, McGraw Hill Book Co., pp.135-144, 1966.
- 8) フローリン, B.A. : フローリンの土質力学Ⅱ, 大草重康訳, 森北出版, pp.234-342, 1969.
- 9) 稲田倍穂, 赤石 勝 : ダイレイタンスーを考慮した一次元圧密解析, 土質工学会論文報告集, Vol.20, No.2, pp.119-127, 1980.
- 10) 三笠正人 : 軟弱粘土の圧密, 鹿島研究所出版会, pp.3-19, 1963.
- 11) Olson, R.E.(1977) : Consolidation under time dependent loading, Proc.ASCE, Vol.103, No.GT1, pp.55-60.