

# 平行平板間乱流の LES における有限要素法の各種計算手法の比較

岡永 博夫\*<sup>1</sup>、青木 克己\*<sup>2</sup>

## Comparison of Various Calculation Techniques for Finite-Element Method at Large Eddy Simulation of Turbulent Channel Flow

by

Hiroo OKANAGA and Katsumi AOKI

(received on March 31, 2006, accepted on June 30, 2006)

### Abstract

In this paper, the effects of the discretization methods of the convection term and the calculation methods of the mass matrix of the unsteady term for the finite-element method (FEM) are discussed with regard to turbulent channel flow and using Large Eddy Simulation (LES). A FEM scheme is based on the Fractional-Step (FS) method with same-order interpolation for velocity and pressure. The Smagorinsky model is applied to the turbulence model to approximate the Reynolds stress term. The pressure Poisson equation is solved by the element by element scaled Conjugate Gradient (CG) method. The obtained results are compared with each other. The effects of the various techniques for FEM are estimated.

**Keywords:** Turbulent Channel Flow, Finite-Element Method, Computational Fluid Dynamics, LES

### 1. 緒言

近年の計算機の向上に伴い、様々な流れの数値解析が行われるようになってきた。工学上では複雑形状を有する物体の周りの乱流の解析が非常に有用で重要でとってきている。複雑な形状を有する場合、非構造格子が用いられる有限要素法が有効な方法のひとつであると考えられている。一方、乱流の解析は差分法において盛んに行われており、物理量の配置によって整合性のある離散化について詳細に検討されている。LESは、乱流を計算する手法の一つとして近年非常によく用いられる手法で、差分法では差分精度や計算格子の変数配置など様々な議論がなされてきた。このような議論は、乱流解析のベンチマーク問題としてよく用いられており、単純な流れ場である平行平板間乱流を対象としている場合が多い。

一般に有限要素法では流速・圧力の補間関数の組み合わせに速度双一次/圧力0次(Q1/P0)要素と速度および圧力に双一次(Q1/P1)要素を用いたものがよく使われている。Q1/P0要素を用いた場合、圧力に関しては不連続な近似をしていることになり、物体周りなどの流れから揚抗力を求める際に精度の低下などを招く恐れがある。一方、非圧縮粘性流の有限要素法解析においてNS方程式の圧力と速度に対して、Q1/P1要素のような同次数の補間要素を用いると解に非物理的な振動を引き起こしてしまうことが知られているが、Fractional Step法を用いることで解の振動を抑えられることが竹内ら<sup>(1)</sup>によって報告されている。したがって解の振動を抑えることが出来れば同次要素を用いた解析の方が複雑な形状の物体周りの解析には有利である。

平行平板間乱流のLESにQ1/P0要素を用いた有限要素法によ

る解析には小林ら<sup>(2)-(5)</sup>や、横原ら<sup>(6)</sup>が行っており、また、Q1/P1要素では三浦ら<sup>(7)</sup>や著者ら<sup>(8)</sup>以外はほとんど行われていない。しかしながら、有限要素法によるLESについてはそれ自体が少なく、有限要素法でよく用いられるいろいろな計算手法が乱流解析に及ぼす影響についてはもう少し議論が必要のように思われる。例えば、3次元有限要素法解析において六面体要素を用いた場合、対流項に巨大な係数行列が現れるが、対流速度に要素平均を用いて係数行列を小さくし、計算速度の高速化と記憶容量の低減化が行われている<sup>(2)</sup>。しかしこのように要素平均すること自体一種のフィルタリングとも考えられ、このような有限要素法の計算技法がLESに及ぼす影響についても検討が必要だと考えられる。

そこで、本研究では、Smagorinskyモデルを用いて、Q1/P1要素による解析を行い、解析領域の影響や集中質量行列および対流項の離散化法などの影響について調べたので報告する。

### 2. 数値解析方法

#### 2.1 基礎方程式

流体は非圧縮粘性流体とし、Sub-grid-scale modelとしてはDeardorff<sup>(9)</sup>が用いたSmagorinsky modelを使用する。以下にフィルタリング操作を施した基礎方程式を示す。なお上付きのバーはフィルタリング操作後の物理量を表す。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

\* 1 工学部機械工学科助教授

\* 2 工学部機械工学科教授

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu_{SGS} \bar{S}_{ij}) \quad (2)$$

$$\nu_{SGS} = (C_S f \Delta)^2 (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (3)$$

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

ここで  $\nu_{SGS}$  はサブグリッドスケール渦粘性係数で  $C_S$  は

Smagorinsky 定数で、ここでは 0.1 とした。  $\Delta$  はサブグリッドスケールの長さスケールで各要素の体積  $V$  を用いて

$$\Delta = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{1/3} = (V)^{1/3} \quad (5)$$

とした。また Smagorinsky model では渦粘性係数の壁面近傍の漸近挙動を捕えられないために、Van Driest 型<sup>(9)</sup>の減衰関数  $f$  を用いている。

$$f = 1 - \exp\left(-\frac{y^+}{A}\right) \quad A = 25 \quad (6)$$

$$y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}$$

ここで  $\tau_w$  は壁面摩擦応力、  $y$  は壁からの距離、  $u_\tau$  は壁面摩擦速度である。

## 2.2 有限要素法による離散化

基礎方程式に Fractional Step 法(FS)<sup>(10)</sup>を適用し、時間進行法に 2 次精度 Adams-Bashforth 法を用いると解くべき式は以下のように表せる。

$$\frac{\tilde{u}_i - \bar{u}_i^n}{\Delta t} = 1.5F_i^n - 0.5F_i^{n-1} \quad (7)$$

$$F_i^n = -\bar{u}_j^n \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}_i^n}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\nu_{SGS} \bar{S}_{ij}^n) \quad (8)$$

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} \quad (9)$$

$$\frac{\bar{u}_i^{n+1} - \tilde{u}_i}{\Delta t} = -\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j} \quad (10)$$

ここで  $\tilde{u}_i$  は速度の中間値である。

式(7)~(10) に重み付き残差法を用いて弱形式化した後、ガラーキン法による空間の離散化を行った。速度と圧力については双 1 次補間を乱流動粘性係数  $\nu_{SGS}$  とその計算に必要な式(3)の  $\bar{S}_{ij}$  は要素内一定の補間を用いた。圧力のポアソン式は Element

by Element 法を適用した SCG 法<sup>(11)</sup>により解いた。なお、式(7)と(10)の右辺の質量行列は、集中質量行列(Lumped Mass matrix)(LM)を用いた場合と Consistent な質量行列(Consistent Mass matrix)(CM)を用いた場合のそれぞれについて計算し解に及ぼす影響を比較している。また式(8)の右辺第 1 項の対流項の離散化については、既に小林<sup>(3)</sup>らが検討しているが、ここでもそのうちの 2 種類を用いて検討を行った。以下に離散化前と有限要素法で離散化した後の式を示す。

$$\bar{u}_{ej} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \Rightarrow \bar{u}_{ej} \int_{\Omega} N_{\alpha} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial x_j} \bar{u}_{i\beta} d\Omega \quad (11)$$

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \Rightarrow \int_{\Omega} N_{\alpha} N_{\beta} \frac{\partial N_{\gamma}}{\partial x_j} \bar{u}_{j\beta} \bar{u}_{i\gamma} d\Omega \quad (12)$$

式(11)は対流速度に要素内平均速度  $\bar{u}_{ej}$  を用いる方法で、式(12)の方法に比べて係数マトリックスが大幅に少なくなり計算速度が向上するため、近年よく用いられる離散化法である。式(12)は従来通りの離散化法である。前者離散化を Form1、後者を Form2 とする。

また、有限要素法式に出てくる各係数マトリックスは解析的手法を用いて求めている<sup>(12)</sup>。

## 2.3 計算条件

解析モデルは channel 乱流で解析領域を Fig.1 に示す。主流方向を  $x$ 、壁面に垂直な方向を  $y$  方向、スパン方向を  $z$ 、としている。解析領域は、小林<sup>(2)</sup>や横原<sup>(6)</sup>が行った解析と同様に、平板間隔を  $H$  として流れ方向(c)、壁面方向(a)、スパン方向(b)に  $3.2H \times 1.0H \times 1.6H$  とし、それぞれ  $32 \times 40 \times 32$  分割としたもの(Mesh1)と、一般に差分法でよく用いられている  $4\pi H \times 2H \times 4/3\pi$ 、 $32 \times 64 \times 32$  分割したもの(Mesh2)の 2 つを用いた。それぞれ流れ方向とスパン方向は等分割し、壁に垂直な方向には不等間隔としている。壁面摩擦速度に基づく Reynolds 数は前者が 360 で後者の格子では 180 である。ただし、これらの Reynolds 数の相違は平板の間隔に基づくもので実際にはまったく同じ流れである。また、計算では無次元摩擦速度と  $H$  はいずれも 1 とした。

境界条件は流れ方向とスパン方向に周期境界条件を用い、壁面でノンスリップ条件を与えた。また流れを維持するために Reynolds 数 360 では -2 を Reynolds 数 180 では -1 の無次元圧力勾配を与えた。解析の時間刻みは 0.0005 とした。本研究で用いた解析領域と計算条件を Table 1 と 2 に示す。

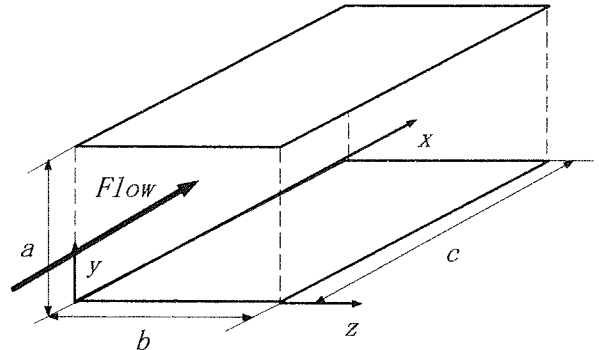


Fig.1 Plane Channel Flow

Table 1 Mesh Configuration

	Mesh Number	$\Delta x^+$	$\Delta y^+$	$\Delta z^+$
Mesh1	32 × 40 × 32	18.0	0.5~14.9	9.0
Mesh2	32 × 64 × 32	73.0	0.9~17.0	24.3

Table 2 Numerical Condition

Case	Calculation Method
Case1	LM,NOSGS,FORM2,Mesh2
Case2	CM,NOSGS,FORM2,Mesh2
Case3	LM,SGS,FORM1,Mesh1
Case4	LM,SGS,FORM2,Mesh1
Case5	LM,SGS,FORM2,Mesh2
Case6	CM,SGS,FORM2,Mesh2
Case7	LM,SGS,FORM1,Mesh2

なお、NOSGS は乱流モデルを用いない解析のことで SGS は Smagorinsky model を用いたものである。

### 3. 解析結果および考察

Fig.2 に平均速度分布を示す。Case1,2 は Mesh2 を用い、乱流モデルを用いないで計算したもので、集中質量行列を用いた Case1 が DNS の速度分布<sup>(13)</sup>より中心部分の流速が遅くなっており、集中質量行列を用いない Case2 が DNS とほぼ同様の結果を示している。森西ら<sup>(14)</sup>の差分法を用いた結果によると格子解像度が高いほど、また差分精度が高いほど DNS より流速が小さくなることを示している。2次元移流方程式に対して、有限要素法を用いた計算では、集中質量行列を用いた場合、2次精度中心差分法と同等の精度で集中質量行列を用いない場合は4次精度中心差分法と同等の計算精度と言われている<sup>(15)</sup>。このことから考えると集中質量行列を用いない場合は集中質量行列を用いた計算結果より最大流速が小さくなるはずであるが結果は逆となっている。Fig.3 は乱流モデルを用いない場合のそれぞれの乱流強度を示したものである。主流方向の乱流強度は質量行列の計算法による違いはほとんどないが、スパン方向と壁方向の乱流強度は集中質量行列を用いない解析のほうが大きいことがわかる。先ほど示した森西らの結果も、差分精度が低いほど乱流強度が DNS より大きくなっているが、有限要素法の結果では主流方向平均速度と同様に集中質量行列を用いない方が主流方向を除いて乱流強度が大きくなるという結果を示している。

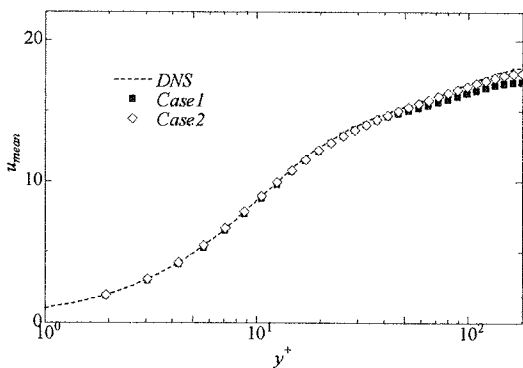


Fig.2 Mean Velocity profile of the simulation without SGS model

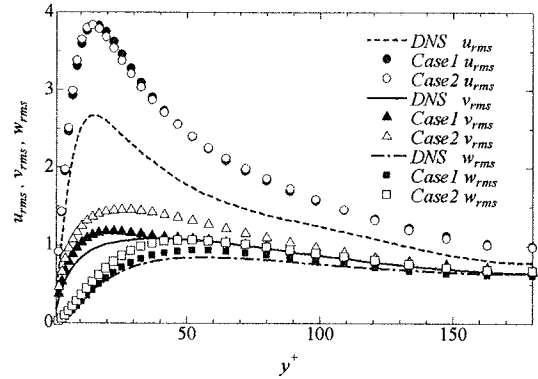


Fig.3 Turbulence intensity profile of the simulation without SGS

次に Smagorinsky model を用いた解析結果を示す。Fig.4 に主流方向の速度分布を示す。乱流モデルを用いない場合と同様に、全ての Case において Consistent な質量行列を用いたものは集中質量行列を用いたものより最大流速が速くなっていることがわかる。解析領域に Mesh1 を用いたものが Case3 と Case4 で、対流項の計算方法が簡略型を用いた Case3 と普通型を用いた Case4 では Case4 の方が DNS の結果と非常に良い一致を示しているが、Case3 は DNS より流速が大きくなっている。解析領域に Mesh2 を用いたものが Case5~7 で手法的には Case4 と Case5 が Case3 と Case7 がそれぞれ対応する。この図より、解析手法が同じ場合、解析領域が大きいほど、格子数が同じであるため格子解像度が低下するために、流速が増加する傾向がある。また対流項に簡易型を格子に Mesh2 を用いた Case7 は一番流速が大きく、DNS の値と大きくずれている事がわかる。対流項の離散化法による違いを比較すると、対流速度に要素平均を用いたモデル(Case3,Case7)より、用いないモデル(Case4,Case5)の方がより DNS に近い結果となった。

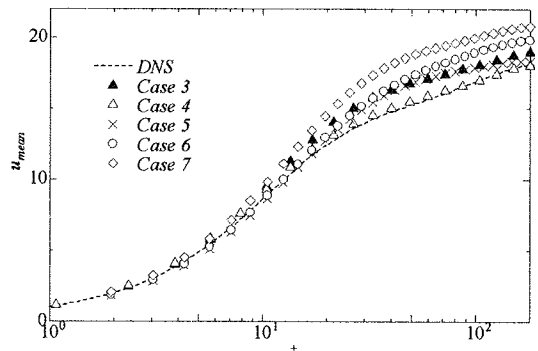


Fig.4 Mean Velocity profile of the simulation with SGS model

Fig.5~7 に x,y,z 方向の乱流強度をそれぞれ示す。主流方向の乱流強度はいずれも DNS より大きく見積もられており、その大きさは主流方向の速度分布と同様な傾向を示しているが、質量行列の計算法による違いはほとんど見られない。一方、主流方向以外の方向に対しては、Case5 を除いて逆に主流の流速が大きいものほど乱流強度の値が小さくなっていることがわかる。

Fig.8 および 9 に  $y^+=4.3$  における主流方向 2 点速度相関を示す。一般に周期境界条件が仮定される方向には 2 点相関が無視できるほどの計算領域が必要とされている。乱流モデルを用いない場合は、計算領域の半分の領域で 2 点相関がほぼ零になっており、集中質量行列を用いない解析の方が速く零に近づいている

ことがわかる。

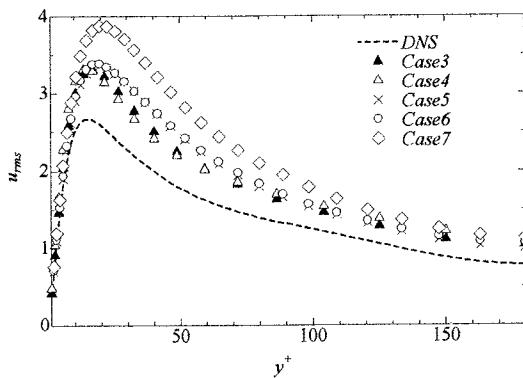


Fig.5 Turbulence intensity profile  $u_{rms}$  of the simulation with SGS

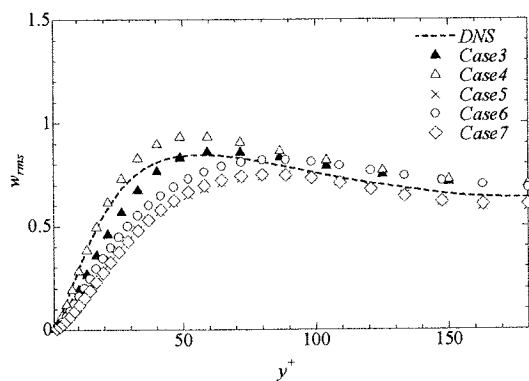


Fig.6 Turbulence intensity profile  $w_{rms}$  of the simulation with SGS

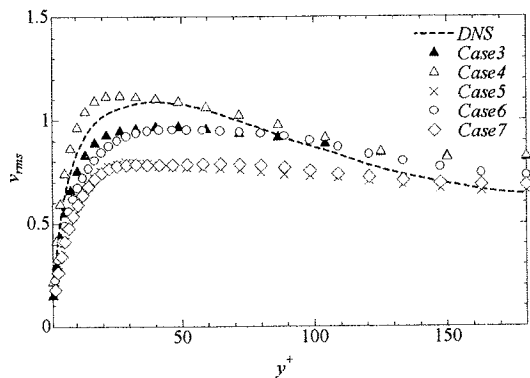


Fig.7 Turbulence intensity profile  $v_{rms}$  of the simulation with SGS

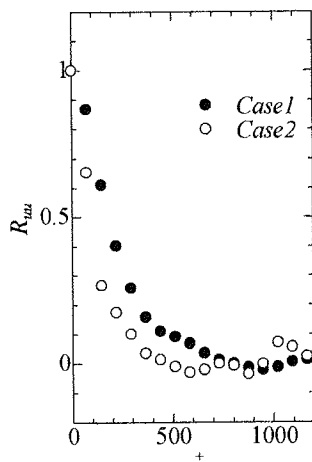


Fig.8 Streamwise two point correlation at  $y^+=4.3$  without SGS

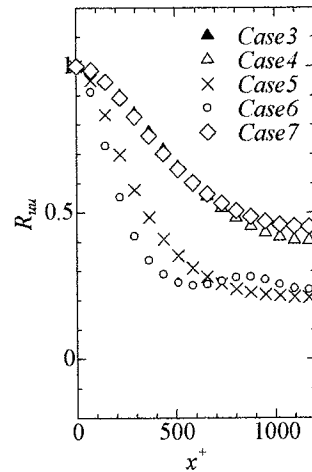


Fig.9 Streamwise two point correlation at  $y^+=4.3$  with SGS

したがって計算領域的には Mesh2 は十分確保されているといえる。Fig.9 の乱流モデルによる結果では、図では重なってわからないが計算領域の小さい Case3 と Case4 はほぼ同じ値で、2 点相関値は最小でも約 0.4 で大きな値となっており、解析領域が不足していることがわかる。また対流項に簡易型を用いた Case7 の値が一番大きくなっている。質量行列の計算法による違いは乱流モデル無しの場合と同様に速く一定値に近づいている。また 2 点相関がゼロとなっていないのは、坪倉ら<sup>(16)</sup>によると壁近傍のストリーク構造が流れ方向に対して DNS と比較して過大評価傾向にあることを示唆すると言われている。実際に坪倉らのいくつかの乱流モデルでは計算方法の違いによって 2 点相関がゼロとなっていないものがある。したがって本計算結果の Case5 および 6 において乱流モデルを用いているが 2 点相関がゼロとなっていない原因のひとつとして乱流動粘性係数を要素内で一定と仮定していることが考えられる。

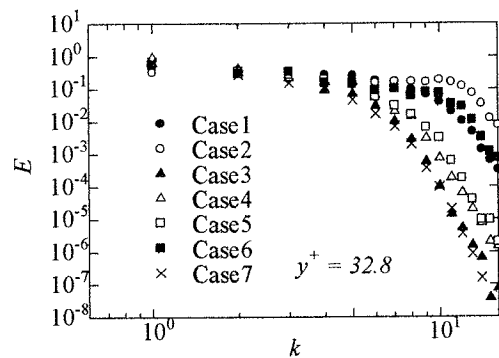


Fig.10 Streamwise One-dimensional energy spectrum

瞬時の流れ場から主流方向に速度に関する 1 次元エネルギー Spektrum を計算しその 1 例を Fig.10 に示す。流れ場を DNS により計算する場合、流れの最小長さスケールの渦を捉えるほど細かい格子解像度が必要で、格子解像度が十分かどうかはエネルギー Spektrum が高波数まで跳ね上がることなく減衰していることから判断される<sup>(17)</sup>。したがって Fig.10 を見ると乱流モデルを用いていない Case1 と Case2 では明らかに格子解像度が不足していることがわかる。さらに、質量行列の計算に集中質量行列を用いないで計算している Case2 の方が高波数での減衰

が小さい。したがって、Consistent な質量行列の場合、見かけ上格子解像度が低下したような計算結果となっている。このことが平均速度を増加させる原因と考えられる。

また、対流項に簡易型を用いた Case3 と Case7 が高波数でのエネルギーの減衰が一番大きいことがわかる。森西ら<sup>(14)</sup>の結果によると格子解像度が同じ場合、差分精度が低いほど高波数領域でのエネルギーの減衰が大きいとされている。対流速度に要素平均を用いた場合も、用いない場合よりも高波数領域でのエネルギースペクトルの減衰が大きく計算精度が低下しているものと推測される。このことが原因で平均速度が増加しているものと考えられる。

平行平板間平均流速を Fig.11 に示す。森西ら<sup>(14)</sup>による差分法の結果も合わせて示してある。ここで M2N は対流項に 2 次精度中心差分法を適用し乱流モデル無しで M2S は 2 次精度で Smagorinsky モデルを用いた解析で M4N および M4S は対流項に 4 次精度中心差分を用いたものである。本計算結果では Case2 と Case4 が最も DNS の結果と一致しているが、Case2 は乱流モデル無しで、森西らの結果の 2 次精度中心差分の SGS モデル無しとほぼ同じ値を示しており、また Case4 は 2 点相関およびエネルギースペクトルを見る限り解析領域の不足は明らかである。集中質量行列を用いた Case1 の結果が森西らの 4 次精度中心差分の SGS モデル無しに近い値を示している。また集中質量行列を用いた Case5 と用いない Case6 を比較すると、SGS モデル無しの場合と同様の結果となっている。以上のことから、有限要素法について計算精度を詳しく議論することは困難であるが、同じ条件で計算した差分法の結果との比較から推測すると、集中質量行列を用いた場合 4 次精度未満 2 次精度以上であり、集中質量行列を用いない場合 2 次精度以下であると考えられる。

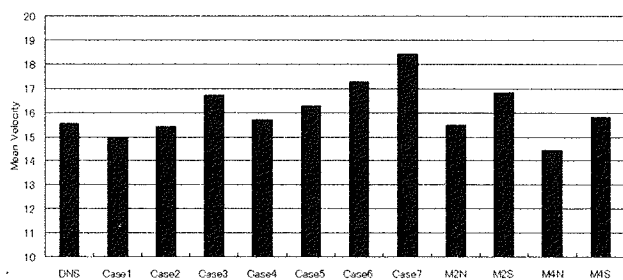


Fig.11 Mean Velocity

#### 4. 結言

近年良く用いられる各種有限要素法の高速度低記憶容量化などの手法を平行平板間乱流の LES 解析に適用した。有限要素法には同次補間要素を用い Fractional Step 法と 2 次精度 Adams-Bashforth 法を用いた。その結果、対流項の離散化に簡略型を用いた場合、計算誤差が大きくなることが明らかとなった。また、本来、解の計算精度が下がる集中質量行列を用いた方が用いない方法より DNS の結果により近づくことがわかった。なお、その時の計算精度は差分法の結果と比較して、集中質量行列を用いた場合 4 次精度未満 2 次精度以上であり、集中質量行列を用いない場合 2 次精度以下相当となることが明らかとなった。

#### 参考文献

- (1) 竹内,水野,非定常非圧縮粘性流の同次補間要素を用いた有限要素解析,日本機械学会論文集(B編)61巻588号,(1995),2882.
- (2) 小林,坪倉,谷口,大島,有限要素法によるチャンネル乱流の LES,生産研究46巻2号,pp111(1994)
- (3) 小林,坪倉,谷口,大島,有限要素法によるチャンネル乱流の LES(第2報),生産研究47巻2号,pp132(1995)
- (4) 坪倉,小林,谷口,大島,有限要素法によるチャンネル乱流の LES(第3報),生産研究48巻2号,pp107(1996)
- (5) 大島,小林,谷口,ラージ・エディ・シミュレーションの有限要素解析における運動量保存性の評価,日本機械学会論文集(B編)63巻610号(1997),1955.
- (6) 横原,棚橋,発散型の対流項を用いた保存形有限要素法スキーム,日本機械学会論文集(B編)68巻666号,(2002),317.
- (7) 三浦,角田,日本機械学会関東支部第11期総会講演会講演論文集,(2005),363.
- (8) 岡永,日本機械学会関東支部第11期総会講演会講演論文集,(2005),365.
- (9) Van Driest, E. R., "On Turbulent Flow Near a Wall", J. Aero. Sci.23,(1956).
- (10) Donea, J., Giuliani, S. and Laval, H., Comput. Methods. Appl. Mech. Eng., 30 (1982), 53.
- (11) 水上昭,Element-by-Element PCG 法のベクトル化と流れ解析への応用,第2回計算力学シンポジウム論文集,(1988)1.
- (12) 棚橋,流れの有限要素法解析 I, 朝倉書店,(1997),130.
- (13) Kim, J., Moin, P. and Moser, R., "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number", J. Fluid Mech., 177 (1987), 133-166
- (14) 森西,市川,奥村,中林,壁乱流の LES における差分精度と格子解像度の影響,日本機械学会論文集(B編)66巻647号,(2000),1750.
- (15) 岡永,棚橋,有限要素法による移流方程式の高精度計算について,日本機械学会論文集(B編)56巻528号,(1991),2372.
- (16) 坪倉,小林,谷口,差分法ダイナミック SGS モデルに適した等法渦粘性型 SGS モデルの構築とその平板チャンネル乱流における評価,日本機械学会論文集(B編)66巻648号,(2000),1975.
- (17) 阿部,河村,松尾,有限差分法を用いた並行平板間乱流の DNS における計算精度の検討,日本機械学会論文集(B編)66巻647号,(2000),1698.