

初期不整を考慮したクロスプライ積層曲面板の 二軸圧縮座屈後挙動に関する理論的説明

辻本 真之*1・根本 圭一*2・粕谷 平和*3

Theoretical Study on the Postbuckling Behavior of Cross-Ply Laminated Curved Plates with Initial Imperfections under Biaxial Compressive Loads

by

Masayuki TSUJIMOTO , Keiichi NEMOTO and Hirakazu KASUYA

(Received on March 31, 2007, accepted on July 4, 2007)

Abstract

Because of their high specific strength and stiffness, fiber-reinforced plastics have been used as structures in various fields, and hence the analysis of thin laminated structures is of importance. In this work, the postbuckling behavior of cross-ply laminated curved plates with initial imperfections, which are simply supported along four edges, under biaxial compression are examined by various methods including Galerkin's method. The inevitability of postbuckling behavior is proved analytically, and the effects of various factors, such as the type of initial imperfection, number of layers, biaxial compressive load ratio, and the postbuckling deflection pattern, are clarified.

Keywords: Structural analysis, Cross-ply laminated curved plates, Postbuckling behavior, Biaxial compressive loads, Initial imperfections

1. 緒 言

航空機およびロケットなどにおいては、構造の軽量化が極限まで要求されており、アルミ合金やチタン合金に比べ、比強度、比剛性の高い先進複合材料と呼ばれる CFRP（炭素繊維強化プラスチック）などからなる積層複合方式が一次構造材へ採用され、世界的に注目を浴びている。このような異方性材料よりなる積層複合材料構造では、圧縮荷重が作用する場合に弾性座屈現象が起りやすくなり、座屈荷重が構造設計の基準となることが多い。特に、積層板は座屈後も荷重低下がなく^{1)~6)}、耐荷能力があるため座屈後も使用可能であり、その状態での変形ならびに安定問題は学問的に興味深いのみでなく、実用上の見地からも重要である。そこで、著者の一人は前報⁷⁾において、二軸圧縮を受けるクロスプライ積層曲面板の座屈後の挙動を理論的に明らかにした。

そこで本論文では、単純支持された二軸圧縮荷重を受けるクロスプライ積層曲面板に、初期不整として初期たわみを考慮した場合を例にとり、座屈後の挙動に与える諸因子、例えば、形状パラメータ、二軸圧縮比、初期たわみなどの影響を解析的

法によって検討する。

2. 座屈解析方法

2. 1 異方性積層曲面板の基礎式

図1に示すような板幅 a , b , 曲率半径 R , 板厚 h の積層曲面板の一隅を座標原点とし、辺に沿って x , y 軸、板厚方向に z 軸をとって、 x , y 軸方向からの軸圧縮荷重 P_x , P_y を受ける場合を考える。また、従来の積層平板構造の座屈後の安定問題を積層曲面板に拡張するために、曲率半径の比較的大きな曲面板と仮定する。ここで w_0 を初期たわみと仮定すると、面内ひずみ成分 ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} , 曲率成分 κ_x , κ_y , κ_{xy} と変位成分 u , v , w との関係

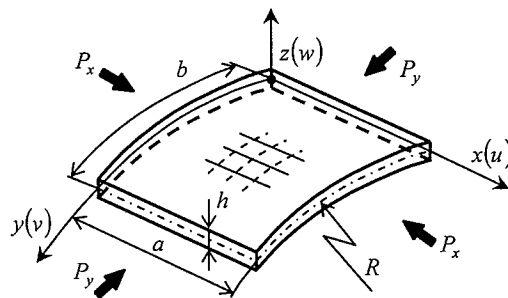


Fig. 1 Configuration and coordinates of cross-ply laminated curved plate.

* 1 : 工学研究科機械工学専攻修士課程
* 2 : 横浜ゴム株式会社 航空部品技術部
* 3 : 工学部動力機械工学科教授

は、座屈後の問題を解析するために、二次の微小項を考慮した有限変形理論を用いると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{w}{R} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

また、面内ひずみ成分と平面応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ との関係は、弾性域内に限定すると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_y \frac{\sigma_y}{E_y}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_x \frac{\sigma_x}{E_x} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、 E_x, E_y はヤング率、 G_{xy} はせん断剛性率、 ν_x, ν_y はポアソン比である。そして、板厚 h であるときの単位幅当たりの面内力 N_x, N_y, N_{xy} は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz = \frac{E_x h}{1 - \nu_x \nu_y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu_y \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{w}{R} \right] \right] \\ N_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz = \frac{E_y h}{1 - \nu_x \nu_y} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{w}{R} \right. \\ &\quad \left. + \nu_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \right] \\ N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz = G_{xy} h \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また、対称クロスプライ積層板の合応力成分 N_x, N_y, N_{xy} 、合モーメント成分 M_x, M_y, M_{xy} と面内ひずみ成分、曲率成分との関係は、弾性域内に限定すると次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性マトリックス、 D_{ij} は曲げ剛性マトリックス

であり、それぞれ一方向強化材の繊維方向、繊維に直角方向の弾性係数 E_L, E_T 、ポアソン比 ν_L, ν_T およびせん断剛性率 G_{LT} が与えられると求められる⁸⁾。

x, y 軸方向に圧縮荷重を受ける積層曲面板の面内変形エネルギー、曲げエネルギーをそれぞれ U_m, U_b とすると

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \quad (6)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \quad (7)$$

であり、変位により圧縮荷重を受ける場合の全ポテンシャルエネルギーは、

$$\Pi = U_m + U_b \quad (8)$$

である。式(8)に式(3)、(5)、(6)および(7)を代入すると次式で表される。

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{h} \left\{ \frac{N_x^2}{E_x} - \left(\frac{\nu_x}{E_x} + \frac{\nu_y}{E_y} \right) N_x N_y + \frac{N_y^2}{E_y} + \frac{N_{xy}^2}{G_{xy}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

2.2 平衡方程式と適合方程式

面内および板厚方向の平衡方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ = N_x \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right\} + N_y \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \right\} + 2N_{xy} \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} \\ - \frac{N_y}{R} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、面内平衡方程式(10)を満足する応力関数 F を次式のように定義する。

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

板厚方向の平衡方程式(11)に上式(12)を代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ = h \left[\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \right) \right. \\ \left. - 2 \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right) - \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

一方、適合条件式は式(1)から u, v を消去すると、

$$\begin{aligned} & H_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (2H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + H_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} \quad (14) \end{aligned}$$

となる。ここで、 H_{ij} は次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= A_{22} A_{66} / H, & H_{12} &= -A_{12} A_{66} / H \\ H_{22} &= A_{11} A_{66} / H, & H_{66} &= (A_{11} A_{22} - A_{12}^2) / H \\ H &= A_{11} A_{22} A_{66} - A_{12}^2 A_{66} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

結局、座屈後の挙動解析は、板厚方向の平衡方程式と適合条件式において、応力関数とたわみ波形に関する連立非線形偏微分方程式を与えられた境界条件の下で解けばよいが、厳密解を得ることは極めて難しいので、以下近似的に解くことにする。

2.3 座屈後の挙動解析

周辺単純支持の場合、一次座屈後の板厚方向の面外境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y=0, b \text{ で } w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

であり、面内境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で } u \text{ は } y \text{ 軸に沿って一定で,} \\ \int_0^b N_x dy = -P_x, \quad N_{xy} = 0 \\ y=0, b \text{ で } v \text{ は } x \text{ 軸に沿って一定で,} \\ \int_0^a N_y dx = -P_y, \quad N_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

である。面外境界条件を満足するように、一次座屈後のたわみ波形 w 、初期たわみ波形 w_0 を板の中央点について対称、および逆対称モードの2項近似表示する。

$$\left. \begin{aligned} w &= w_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) + w_{21} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \\ w_0 &= c_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) + c_{21} \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここで c_{11}, c_{21} は初期たわみの大きさを表しており、板厚に対する割合である。上式を式(14)の適合条件式に代入し、面内境界条件を満足する応力関数 F を求めると次式のように表される。

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2h} \lambda^2 (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11}) \left\{ \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \frac{1}{16H_{22}} + \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \frac{1}{16H_{11}\lambda^4} \right\} \\ & \quad + \frac{2}{h} \lambda^2 (w_{21}^2 + 2w_{21}c_{21}) \left\{ \cos\left(\frac{4\pi}{a}x\right) \frac{1}{256H_{22}} + \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \frac{1}{16H_{11}\lambda^4} \right\} \\ & \quad + \frac{1}{4h} \lambda^2 (w_{11}w_{21} + w_{11}c_{21} + w_{21}c_{11}) \\ & \quad \times \left[\begin{aligned} & -\cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \frac{1}{H_{22}} + \cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right) \frac{1}{9H_{22}} \\ & + 9 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \frac{1}{H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \\ & - \cos\left(\frac{3\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{2\pi}{b}y\right) \frac{1}{81H_{22} + 36(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \end{aligned} \right] \\ & \quad - \frac{w_{11}}{Rh} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \frac{1}{H_{22} + (2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + H_{11}\lambda^4} \\ & \quad - \frac{w_{21}}{Rh} \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{2\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \frac{4}{16H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + H_{11}\lambda^4} \\ & \quad - \frac{\sigma_x}{2} y^2 - \frac{\sigma_y}{2} x^2 \quad (19) \end{aligned}$$

ここで、 $\lambda (= a/b)$ は曲面板のアスペクト比である。さらに、板厚方向の平衡方程式に代入し、Galerkin法を適用すると、応力とたわみに関する三次方程式を得る。

まず、 $(m,n) = (1,1)$ を代入して解くと、次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{w_{11}}{a^2\lambda}\right) \left\{ D_{11} + 2(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 + D_{22}\lambda^4 \right\} \\ & + \frac{\pi^4}{64} \left(\frac{1}{ab}\right) \end{aligned}$$

$$\times \left[\begin{aligned} & \frac{1}{H_{11}\lambda^2} (w_{11} + c_{11}) \left\{ (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11}) + 4(w_{21}^2 + 2w_{21}c_{21}) \right\} \\ & + \frac{1}{H_{22}} \lambda^2 (w_{11} + c_{11}) (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11}) \\ & + \lambda^2 (w_{21} + c_{21}) (w_{11}w_{21} + w_{11}c_{21} + w_{21}c_{11}) \\ & \times \left[\frac{81}{H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \right. \\ & \left. + \frac{1}{81H_{22} + 36(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} + \frac{4}{H_{22}} \right] \end{aligned} \right]$$

$$+ \frac{1}{R} \lambda$$

$$\times \left[\begin{aligned} & \left(\frac{8}{3}\right) w_{11} (w_{11} + c_{11}) \frac{1}{H_{22} + (2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + H_{11}\lambda^4} \\ & + \left(\frac{128}{5}\right) w_{21} (w_{21} + c_{21}) \frac{1}{16H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + H_{11}\lambda^4} \\ & + \frac{1}{H_{22}} \left\{ \left(\frac{1}{6}\right) (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11}) + \left(\frac{1}{30}\right) (w_{21}^2 + 2w_{21}c_{21}) \right\} \end{aligned} \right]$$

$$+ \frac{1}{R^2} \left\{ \left(\frac{1}{4}\right) w_{11} \frac{ab}{H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \right\}$$

$$- \sigma_x h \frac{\pi^2}{4\lambda} (w_{11} + c_{11}) (1 + \lambda^2 k_y) - \sigma_x k_y h \frac{4ab}{R\pi^2} = 0 \quad (20)$$

次に、 $(m,n)=(2,1)$ を代入して解くと、

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4}{4} \left(\frac{w_{21}}{a^2 \lambda} \right) \left\{ 6D_{11} + 8(D_{12} + 2D_{66})\lambda^2 + D_{22}\lambda^4 \right\} \\ & + \frac{\pi^4}{64} \left(\frac{\lambda}{b^2} \right) \\ & \times \left[\frac{4}{H_{11}\lambda^4} (w_{21} + c_{21}) \left\{ w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11} \right\} + 4(w_{21}^2 + 2w_{21}c_{21}) \right] \\ & + \frac{1}{H_{22}} (w_{21} + c_{21}) (w_{21}^2 + 2w_{21}c_{21}) \\ & \times (w_{11} + c_{11}) (w_{11}w_{21} + w_{11}c_{21} + w_{21}c_{11}) \\ & \times \left[\frac{81}{H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \right. \\ & \left. + \frac{4}{81H_{22} + 36(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} + \frac{4}{H_{22}} \right] \\ & + \frac{1}{R} \lambda \\ & \times \left[\frac{(128)}{5} w_{21} (w_{11} + c_{11}) \frac{1}{16H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + H_{11}\lambda^4} \right. \\ & + \left. \frac{(32)}{5} w_{11} (w_{21} + c_{21}) \frac{1}{H_{22} + (2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + H_{11}\lambda^4} \right. \\ & \times \left. (w_{11}w_{21} + w_{11}c_{21} + w_{21}c_{11}) \right. \\ & \times \left. \left[\frac{2}{H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{1}{5} \right) \frac{6}{81H_{22} + 36(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} + \frac{16}{15H_{22}} \right] \right] \\ & + \frac{1}{R^2} \left\{ w_{21} \frac{4ab}{16H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + H_{11}\lambda^4} \right\} \\ & - \sigma_x h \frac{\pi^2}{\lambda} (w_{21} + c_{21}) (1 + 4\lambda^2 k_y) = 0 \quad (21) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $k_y (= \sigma_y / \sigma_x)$ は二軸圧縮比である。式(20)と式(21)にNewton-Raphson法を適用し、 w_{11} 、 w_{21} を求める。また、曲面板の中央面での x 軸方向の平均軸縮み ϵ_{mx} は、

$$\begin{aligned} \epsilon_{mx} &= -\frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \\ &= \left(\frac{\pi^2}{8a^2} \right) (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11} + 4w_{21}^2 + 8w_{21}c_{21}) \\ & - \frac{w_{11}}{R\pi^2} \frac{4}{H_{22} + (2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + H_{11}\lambda^4} (H_{11}\lambda^2 + H_{12}) \\ & + \sigma_x h (H_{11} + k_y H_{12}) \quad (22) \end{aligned}$$

で与えられ、平均軸圧縮応力 $\sigma_x (=P_x/bh)$ との関係が得られる。

3. 解析結果の検討

炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材の対称クロスプライ積層曲面板について数値計算を実行した。その基本弾性定数(繊維容積含有率 $V_f = 60\%$)は、平均化近似解法により計算され、

実験でも確認された値である⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} E_L &= 137 \text{ (GPa)}, E_T = 8.17 \text{ (GPa)}, G_{LT} = 4.75 \text{ (GPa)} \\ \nu_L &= 0.316, \nu_T = 0.0189 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

図2に形状パラメータ $b^2/Rh=10$ 最外層積層角 $\theta=0\text{deg}$ 積層数 $N=3,5,\infty$ と変化させ初期たわみが無い場合の無次元平均軸圧縮応力 $K (= \sigma_x b^2/E_T h^2)$ と平均軸縮み ϵ_{mx} の関係(a)~(c)に示す。また、図3に形状パラメータ $b^2/Rh=20$ 、最外層積層角 $\theta=90\text{deg}$ 積層数 $N=3,5,\infty$ の場合を(a)~(c)に示す。図中の K_p は一次座

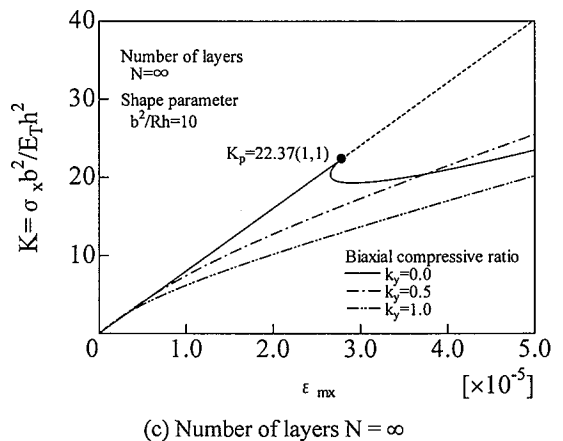
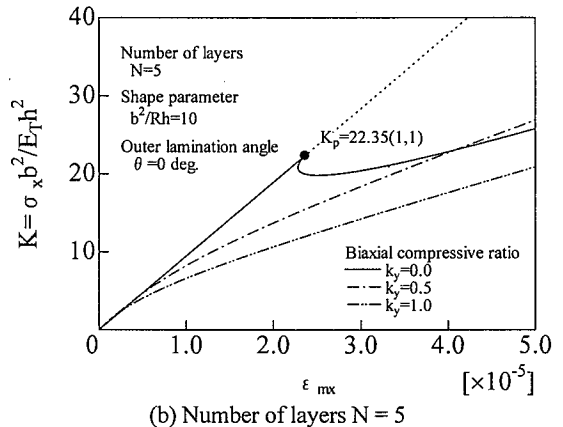
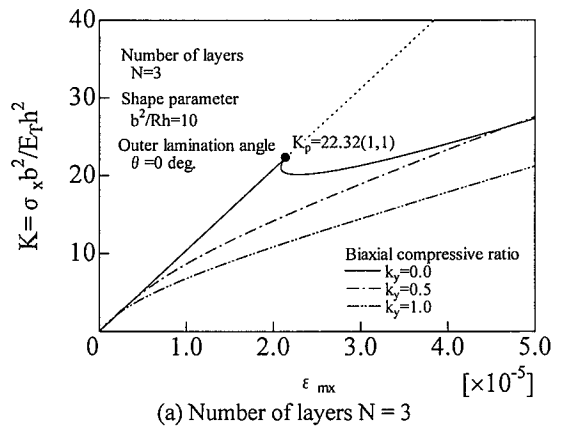
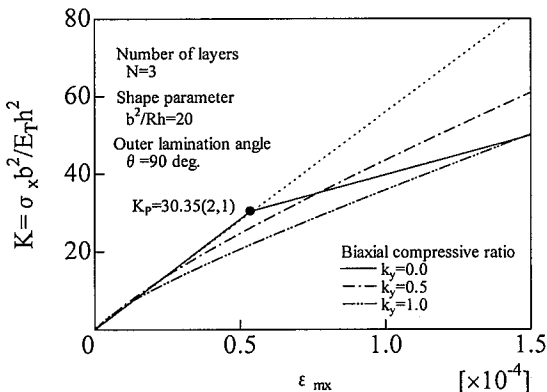


Fig.2 The relation between K and ϵ_{mx} of cross-ply laminated curved plate. ($b^2/Rh = 10$)

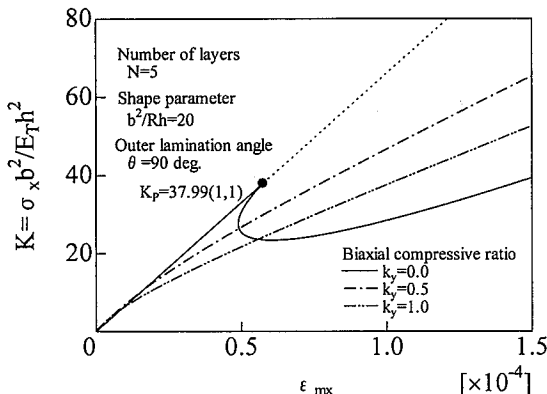
屈値を示し、座屈時の x, y 軸方向半波数 m, n の値を括弧内に示している。また、図4に初期たわみを考慮した場合の無次元平均軸圧縮応力 K と平均軸縮み ϵ_{mx} の関係について形状パラメータ b^2/Rh および二軸圧縮比の影響を見るために、積層板 ($b^2/Rh=0$) の場合を(a)に、 $b^2/Rh=10$ と一定にし一軸圧縮荷重 $k_y=0.0$ を(b)に、二軸圧縮荷重 $k_y=1.0$ を(c)にそれぞれ示す。なお、板厚方向に均質な直交異方性積層について示す。本論文では一例として正方形板 ($alb=1$) のみを扱っている。そのため、たわみ波形 w_{11} を支配的に取り扱うが、条件により波形 w_{21} が現われ

る場合が存在する。よって、それぞれの値に支配された初期たわみ c_{11} および c_{21} を組み合わせて提示する。ここで、 c_{11}, c_{21} は対称モードと非対称モードによる初期たわみの大きさを表している。なお、 $c_{11}=0.10$ は、 x, y 軸方向にそれぞれ1半波で、その大きさは板厚 h の10%の場合を示す。

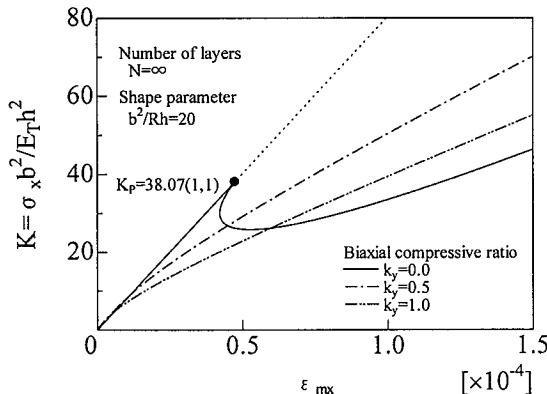
図2より、一次座屈値は積層数の増加にともない増加するが、二軸圧縮比が増加すると減少する。線図の傾きは積層曲面板の x 軸方向の剛性を示し、二軸圧縮比が増加すると剛性は増加する。座屈前の剛性は積層構成と二軸圧縮比に依存し、形状パラ



(a) Number of layers $N = 3$

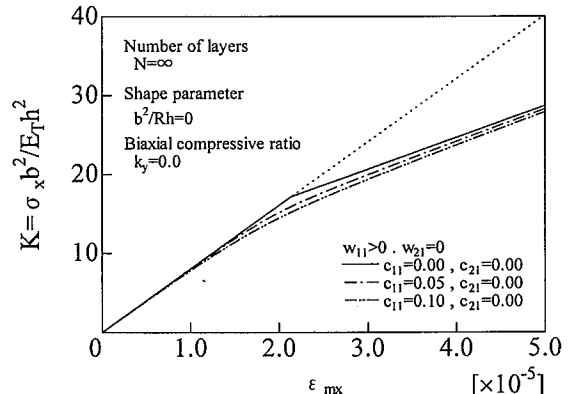


(b) Number of layers $N = 5$

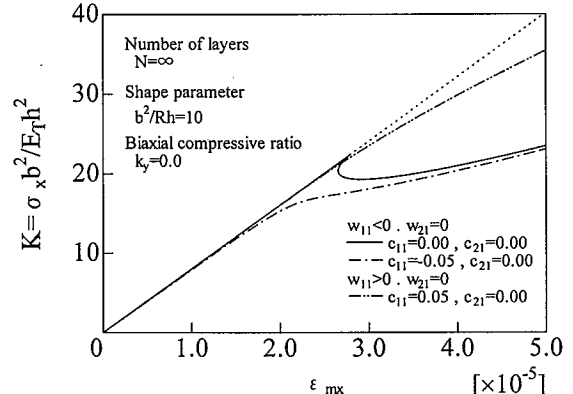


(c) Number of layers $N = \infty$

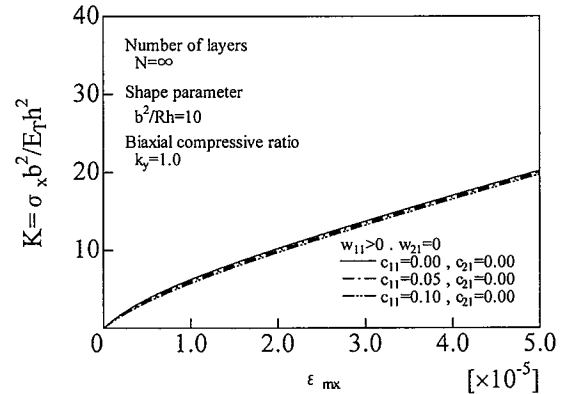
Fig.3 The relation between K and ϵ_{mx} of cross-ply laminated curved plate. ($b^2/Rh = 20$)



(a) Shape parameter $b^2/Rh = 0$



(b) Shape parameter $b^2/Rh = 10$



(c) Shape parameter $b^2/Rh = 10$

Fig.4 The relation between K and ϵ_{mx} of cross-ply laminated curved plate with initial imperfection.

メータは関与せず、一次座屈後の挙動は形状パラメータと座屈時の軸方向半波数が関係する。

座屈現象は、座屈後、剛性は低下するが座屈時より線形挙動を示す分岐座屈、座屈時より応力低下域を示す飛び移り座屈、さらに、初期状態からの非線形挙動を示す3種類を確認することができる。これらは、形状パラメータ、二軸圧縮比、座屈時の軸方向半波数により決定される。

積層平板では常に分岐座屈を呈することを既報告にて示している。一方、積層曲面板においては、座屈時の軸方向半波数 m, n が(1,1)のような対称変形モードの場合、一軸圧縮時には応力低下域を生じ飛び移り座屈となり、二軸圧縮時には、初期状態から非線形挙動を呈する。座屈時の軸方向半波数 m, n が、どちらか偶数の逆対称変形モードの場合は、一軸圧縮時、二軸圧縮時ともに積層平板と同様の分岐座屈を呈する。

積層曲面板の場合、座屈後、負(内側方向)と正(外側方向)のたわみが考えられるが、初期不整の無い場合は、エネルギーレベルを考慮し、一軸圧縮時は負(内側方向)、二軸圧縮時は正(外側方向)にたわむ場合の曲線のみが意味を持つ。

図3より、初期不整を有する積層板における座屈後の挙動は、常に初期不整のない場合の挙動に比して低い値で非線形挙動を呈する。積層曲面板においては、一軸圧縮時、変形モード $w_{11} > 0$ で曲面板の凸側に変形する際は、応力低下域の存在はなく、耐荷能力を有すると考えられる。また、変形モード $w_{11} < 0$ で曲面板の凹側に変形する際と二軸圧縮時は、初期たわみ量の増加にともない、初期不整のない場合の挙動に比して低い値で非線形挙動を呈する。

4. 結 言

圧縮荷を受ける周辺単純支持された初期不整を有するク

ロスプライ積層曲面板について、一次座屈後の挙動を理論的に解明し、座屈現象の必然性を解析的に明らかにした。これにより、一次座屈後の積層曲面板の耐荷能力を明らかにし、初期たわみが座屈後挙動に与える影響について示した。

参考文献

- 1) 小林繁夫, 住原清秀, 紀平正知: CFRP 積層板の圧縮座屈強度(第1報), 日本航空宇宙学会誌, Vol.28, No.317 (1980), 293.
- 2) 粕谷平和, 美濃部充好: 軸圧縮を受ける繊維強化積層板の二次座屈現象に関する理論的考察, 東海大学紀要工学部, Vol.31, No.1 (1991), 133.
- 3) 粕谷平和, 美濃部充好, 根本圭一: 圧縮荷を受ける複合材料積層板の座屈強度, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.58, No.553 (1992), 1544.
- 4) 粕谷平和, 美濃部充好: 初期不整を有する複合材料積層板の圧縮座屈強度, 材料, Vol.42, No.478 (1993), 804.
- 5) 根本圭一, 辻本真之, 粕谷平和: 初期不整を有するクロスプライ積層板の二軸圧縮座屈後の挙動解析, 東海大学紀要工学部, Vol. 46, No.2 (2007), 93.
- 6) 粕谷平和, 根本圭一, 辻本真之: 面内圧縮荷を受けるアングルプライ積層平板の座屈挙動, 日本設計工学会, (to be published)
- 7) 渡森孝有, 久保田友久, 粕谷平和: 複合材料積層曲面板の二軸圧縮座屈後の挙動解析, 東海大学紀要工学部, Vol. 41, No. 1 (2001), 83.
- 8) R.M.Jones: "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill (1975).
- 9) 植村益次, 山田直樹: 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24, No.257 (1975), 156.