

液状化飽和砂地盤の粘弾性変形流動解析

武田 倫直^{*1} 本間 重雄^{*2}

Viscoelastic Analysis of Deformation and Flowage of Liquefied Sandy Ground

by

Michinao TAKEDA^{*1} and Shigeo HONMA^{*2}

(Received on Sep. 29, 2008 and accepted on Nov. 26, 2008)

Abstract

Viscous resistance of saturated sandy ground at liquefaction was evaluated using the Stokes law based on the falling velocity of a sphere body in liquefied soils. And based on the dynamic viscosity, the viscous deformation of the liquefied ground was analyzed first in conjunction with Maxwell and Kelvin viscoelastic principle corresponding to the elastic solutions for a semi-infinite half space on which a circular uniform load is applied. Secondly, the flowage of the liquefied ground due to uplifting of the underground structure was analyzed based on the Navier-Stokes equation. The time-rate of change of displacements and the flowage of sand layer were compared with the results of laboratory liquefaction experiments, and good reappearances were observed.

Keywords: liquefaction, viscoelasticity, correspondence principle, viscous flow, Navier-Stokes equation

1. まえがき

地震時の地盤の液状化災害には、支持力喪失による構造物の沈下、護岸や斜面または地盤そのものが変位する側方流動、埋設構造物の浮き上がり現象などがあるが、いずれも地盤が剛性を失って流動化し変位が許容限度を超えて過大になることが被害の本質である¹⁾。本論では、液状化時の飽和砂の粘性抵抗を、地盤中を沈降する球体の落下速度から Stokes の法則を用いて評価する方法を述べ、その粘性係数をもとに地盤の流動変形を、半無限弾性体表面に円形等分布荷重が載荷された場合の弾性解に対し、Maxwell 体および Kelvin 体の線形粘弾性対応原理により解析する手法について検討した。また、地盤中に埋設された地中構造物の浮き上がりに伴う地盤の流動化状況を Navier-Stokes の方程式を用いて解析し、解析条件と同じ状況下での室内液状化実験を通じて砂層表面変位や流動化の発生状況について比較した。

2. 液状化飽和砂の粘性係数測定

液状化飽和砂の巨視的な粘性係数を把握するため、粘性流体中に置かれた球体の落下抵抗に基づく Stokes の法則を利用する。この法則によれば直径 d の球体が粘性係数 η の流体中を速度 v で沈降する

際に受ける抵抗は

$$R = 3\pi\eta dv \quad (1)$$

で与えられ、一方密度 ρ^* の球体の密度 ρ_{sat} の流体中での重量は

$$W' = \frac{\pi d^3}{6}(\rho^* - \rho_{sat})g \quad (2)$$

であるので、球体が等速沈降する場合には $R=W'$ より

$$\eta = \frac{d^2}{18v}(\rho^* - \rho_{sat})g \quad (3)$$

で粘性係数が評価できる。実験による測定方法は Fig.1 に示すような振動土槽内の飽和砂(相対密度 20%豊浦砂)に振幅 3mm、周波数 3Hz の正弦波を加えて液状化させ、その中に鉛散弾を入れた軟式野球ボール($d=6.65\text{cm}$)を設置して、その沈降速度を測

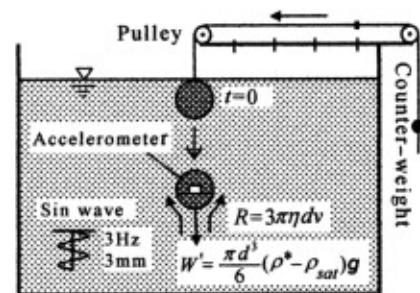


Fig. 1 Measurement of dynamic viscosity of liquefied soil.

* 1 工学研究科土木工学専攻修士課程
* 2 工学部土木工学科教授

定した。落下球体および飽和砂の密度はそれぞれ $\rho^* = 2.44 \text{ g/cm}^3$, $\rho_{\text{sat}} = 1.95 \text{ g/cm}^3$ である。

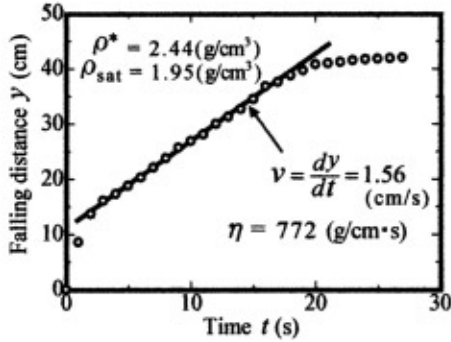


Fig. 2 Falling velocity of a submerged sphere body

Fig.2 は測定結果の一例を示したものであり、式(3)により粘性係数を求めると $\eta = 500 \sim 1000 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$ であった。10℃の水の静粘性係数は $\eta_w = 0.013 \text{ g/cm} \cdot \text{s}$ であるので、液状化時の飽和砂は水の約5万倍から10万倍の粘性を有していることになる。

3. 液状化飽和砂地盤の粘弾性変形解析

外力が作用する弾性体内の応力や変位については多くの解析解が求められている。例えば、半無限弾性体の表面に半径 a , 荷重強さ p_0 の円形等分布荷重が載荷されたときの地表面の水平および鉛直変位は

$$u_{z=0} = ap_0 \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \begin{cases} r/2a; & r \leq a \\ a/2r; & r \geq a \end{cases} \quad (4)$$

$$w_{z=0} = 2ap_0 \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\left(1 - \frac{r}{a}\right) K(k) + \left(1 + \frac{r}{a}\right) E(k) \right] \quad (5)$$

で与えられ²⁾、ここに E は弾性係数、 ν はポアソン比、 r は半径方向距離、 $K(k)$, $E(k)$ は第一種および第二種完全楕円積分である。

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta, \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta \quad (6a, b)$$

$$k^2 = (4r/a)/(1+r/a)^2 \quad (6c)$$

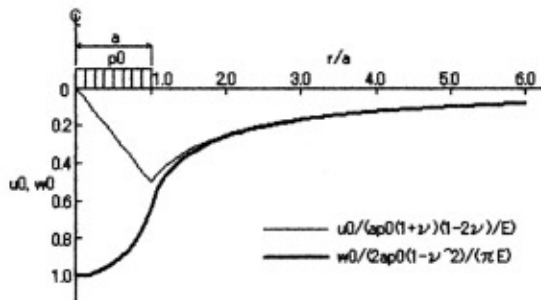


Fig. 3 Surface displacements in a semi-infinite elastic space.

この場合、水平変位の最大値は載荷縁 $r=a$ で、鉛直変位の最大値は $r=0$ で生じる (Fig.3)。

さて、準静的問題における弾性体と粘弾性体の応力～歪関係に関する対応原理によれば

Elastic	Transformed Viscoelastic	
$s_{ij} = 2Ge_{ij}$	$\bar{P}(s)\bar{s}_{ij} = 2\bar{Q}(s)\bar{e}_{ij}$	(7a, b)
$\sigma_{ii} = 3K\varepsilon_{ii}$	$\bar{\sigma}_{ii} = 3K\bar{\varepsilon}_{ii}$	(8a, b)

の関係があり³⁾, s_{ij} , e_{ij} はそれぞれ偏差応力、偏差歪、バーのついた量はラプラス変換、 s はその核を表す。したがって弾性解における材料定数 G を \bar{Q}/\bar{P} に置き換えれば粘弾性体に対するラプラス変換解となり、その逆変換は粘弾性解となる。式(4)(5)に含まれる材料定数を体積弾性係数 K およびせん断弾性係数 G を用いて表すと

$$\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} = \frac{3}{6K+2G}, \quad \frac{1-\nu^2}{E} = \frac{3K+4G}{4G(3K+G)} \quad (9a, b)$$

となるので、遅延弾性応答を表す Kelvin 体 ($\{P\} = 1$, $\{Q\} = \{G + \eta \partial_t\}$; ∂_t は時間微分演算子) に対する材料定数のラプラス変換は次のようになる。

$$\frac{3}{6K+2G} \xrightarrow[\text{operator}]{\text{Viscoelastic}} \frac{3}{\{6KP+2Q\}} \xrightarrow[\text{transform}]{\text{Laplace}} \frac{3}{2s(\eta s + 3K + G)} \quad (10a)$$

$$\frac{3K+4G}{4G(3K+G)} \xrightarrow[\text{operator}]{\text{Viscoelastic}} \frac{\{3K+4Q\}}{\{4Q(3K+Q)\}} \xrightarrow[\text{transform}]{\text{Laplace}} \frac{3K+4(G+\eta s)}{4s(G+\eta s)(3K+G+\eta s)} \quad (10b)$$

式(10a, b)の最後を部分分数化して逆変換を行うと⁴⁾、地表面の水平および鉛直クリープ応答変位は次式で与えられる⁵⁾。

$$u_{z=0} = ap_0 \left[\frac{3}{6K+2G} (1 - e^{-(3K+G)t/\eta}) \right] \begin{cases} r/2a; & r \leq a \\ a/2r; & r \geq a \end{cases} \quad (11a)$$

$$w_{z=0} = \frac{ap_0(3K+4G)}{2\pi(3K+G)} \left[\frac{1}{G} - \frac{3}{3K+4G} e^{-(3K+G)t/\eta} - \frac{3K+G}{G(3K+4G)} e^{-Gt/\eta} \right] \cdot \left[\left(1 - \frac{r}{a}\right) K(k) + \left(1 + \frac{r}{a}\right) E(k) \right] \quad (11b)$$

時間 $t=0$ では $u_{z=0}=0, w_{z=0}=0$ であり、 $t=\infty$ では弾性解と一致する。

一方、即時変形と継続粘性流れを表す Maxwell 体 ($\{P\} = \{\partial_t + 1/\tau\}$, $\{Q\} = \{G\partial_t\}$) について変位成分を求めると ($\tau = \eta/G$ は遅延時間)

$$u_{z=0} = ap_0 \left[\frac{3}{6K+2G} + \frac{1}{2K} (1 - e^{-3Kt/\eta}) \right] \begin{cases} r/2a; & r \leq a \\ a/2r; & r \geq a \end{cases} \quad (12a)$$

$$w_{z=0} = \frac{ap_0}{2\pi} \left[\frac{3K+4G}{G(3K+G)} + \frac{t}{\eta} + \frac{1}{K}(1-e^{-3Kt/\eta}) \right] \cdot [(1-r/a)K(k) + (1+r/a)E(k)] \quad (12b)$$

となり⁵⁾, $t=0$ では弾性解と一致する. 液状化時の飽和砂地盤の流動化は, 液状化発生後は Maxwell 体のバネによる地盤の即時弾性変形とダッシュポットによる粘性流れ, 振動停止後は Kelvin 体による遅延弾性応答として表現できる可能性がある.

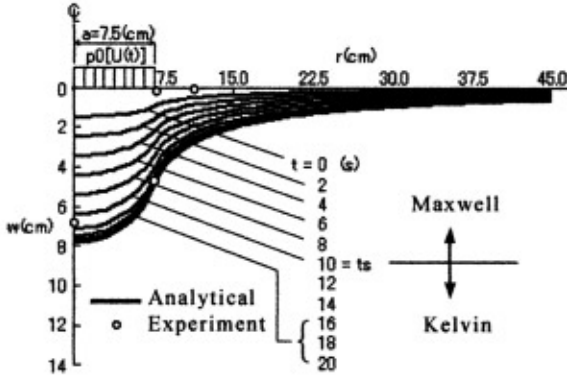


Fig. 4 Surface displacements in a viscoelastic half space.

Fig.4 は振動土槽内のモデル地盤を対象に, 砂層表面に直径 15cm, 荷重強さ $p_0=15\text{gf/cm}^2(1.47\text{kPa})$ の円形等分布荷重が瞬間載荷された場合の表面鉛直変位の計算結果を示したものである. 液状化飽和砂のポアソン比は 0.499(非圧縮性)とし, 弾性係数 $E=10\text{kPa}$, 粘性係数 $\eta=10\text{kPa}\cdot\text{s}$ としている. 加振は 10 秒間継続し, その間の飽和砂の粘弾性挙動を(12a,b)の Maxwell 体, それ以降は(11a,b)の Kelvin 体として計算したところ, 載荷重による地盤の粘性変形の進行と加振停止後の変形の終息がうまく再現されている.

計算結果を検証するため, 解析条件と同じ状況に対する振動台実験を行った. 載荷重には直径 15cm のアクリル円筒の下端にゴム膜を貼り付け, 内部に鉛散弾を所定の荷重強さになるよう充填し, 振幅 3mm, 周波数 3Hz の外力条件で加振を行った. 円筒模型は Fig.4 中に示したとおり 10 秒後には中心部で 7cm, 筒端で 5cm 沈下し解析結果に近い値が発現したが, 円筒外側の砂層表面は砂層内部からの間隙水の排水によって流動化したままで, 著しい表面変位は観察されなかった.

4. 液状化飽和砂地盤の流動解析と振動実験

液状化飽和砂地盤を高粘性ニュートン流体と仮定すると, 熱影響を無視した流体運動のオイラー記述による基礎方程式は次式で与えられる.

a) 連続の式 $\dot{\rho} + \rho v_{i,i} = 0 \quad (13)$

b) 運動方程式 $\sigma_{ij,j} + \rho b_i = \rho \dot{v}_i \quad (14)$

c) 構成式 $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda\delta_{ij}D_{kk} + 2\eta D_{ij} \quad (15)$

ここに, ρ は流体密度, v_i は速度ベクトルの成分, σ_{ij} は応力テンソルの成分, b_i は物体力成分, p は静水圧, λ, η はそれぞれ膨張およびせん断粘性係数, D_{ij} は変形率である. 式(15)を(14)に代入し $D_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2$ を適用すると次の Navier-Stokes の方程式となる.

$$\rho \dot{v}_i = \rho b_i - p_{,i} + (\lambda + \eta)v_{j,ji} + \eta v_{i,jj} \quad (16)$$

さらに流体を非圧縮性と仮定し, 上式を断面 2 次元流れ場 (x 方向速度を u , y 方向速度を v とする) に展開すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (17a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = b_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial v}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (17b)$$

となる. (17a)(17b)の連立微分方程式に対し, 流体各部における物体力の作用を無視し $\partial(17a)/\partial y - \partial(17b)/\partial x$ なる処理によって圧力項を消去すると, 次の渦度 ζ に関する輸送方程式が得られる.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} - v \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \quad (18)$$

ここに, $\zeta = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}$ (19), $\nu = \eta/\rho$ は動粘性係数である. また, 流速は流れ関数 ψ の導関数として $u = \partial\psi/\partial y, v = -\partial\psi/\partial x$ (20a,b) で与えられ, 式(20a,b)を(19)に適用すると $\zeta = \nabla^2\psi$ (21) なるポアソン方程式となる. 式(18)において, 本ケースでは流速の大きさ

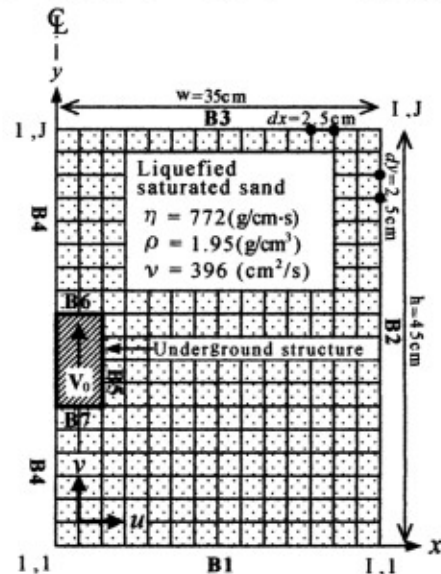


Fig.5 Finite difference mesh for the analysis of flowage of liquefied ground.

に比べ動粘性係数が非常に大きく($\nu=396\text{cm}^2/\text{s}$),渦の拡散が卓越するクリープ流に近い状況である.解析は式(18)を差分化し,ADI法を用いて s を計算した後,SOR法により式(21)を計算し,式(20a,b)により速度成分を求める手順をとった⁶⁾. Fig.5に差分メッシュ(埋設構造物中心線より片側半分)と境界条件を示す.領域底面B1および右壁B2はNo-Slip固定壁境界条件,上面B3はSlip境界条件,B4は対称面境界条件,B5はNo-slip移動壁境界条件,B6,B7はそれぞれ流入・流出移動壁境界条件とした.

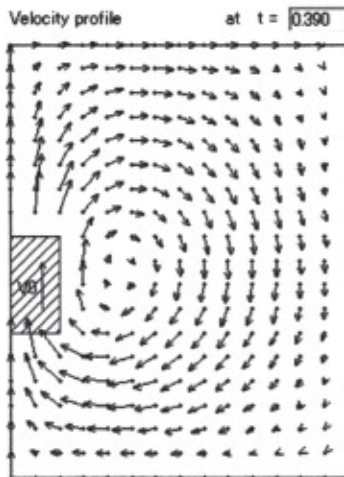


Fig.6 Calculated results of the flowage of liquefied sand layer.

埋設構造物の上昇速度を $V_0=1\text{cm/s}$ とした場合の計算結果を Fig.6に示す.構造物の浮き上がりに伴い周辺の飽和砂が引きずられ,土槽内を渦状に流動する状況がうまく再現されている.

液状化時の埋設物の浮き上がりによる砂層の流動を確認するため,振動土槽による室内振動実験を実施した.幅80cm,高さ60cm,奥行き40cmのアルミニウム製土槽に豊浦砂を投入し,土槽下部から水を吹き上げながら所定の密度に調整した砂層中に縦横10cm,奥行き34cmの亚克力製埋設構造物模型を設置した.模型内部には4.2kgの鉛散弾を敷き詰めてあり,構造物密度は $\rho^*=1.23\text{g}/\text{cm}^3$ である.また,砂層の変位を観察するため直径5mmの布製袋の内部に同じ砂を充填した袋紐を構造物左右に6箇所配置した.この状態のモデル地盤に対し,周波数3Hz,振幅3mm(最大加速度106gal)の正弦波を10秒間加え,構造物の浮き上がり量と砂層の変形量を測定した.

Fig.7に示すとおり,実験終了後には構造物模型は約10cm上方に変位し,それに伴い周辺の砂層は構造物を回りこむように移動している.液状化時の飽和砂の密度は $\rho_{\text{sat}}=1.95\text{g}/\text{cm}^3$ であるので,構造物の浮き上がりは液状化時に $B=(\rho_{\text{sat}}-\rho^*)Vg=23.5\text{N}$ の大きさの浮力を受けた結果である.構造物の浮き上がりに伴い,上部の砂は上方に押し上げられるが,液化

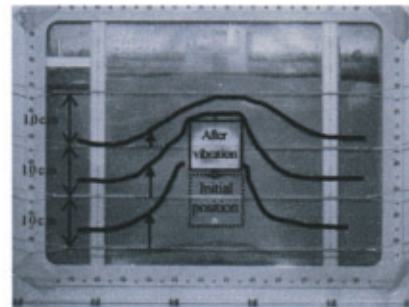


Fig.7 Flowage profile of liquefied sand by laboratory vibration experiment.

しているために左右方向に流れ,砂層表面に大きな凹凸は発生しない.この状況は解析条件と一致しており,したがって液状化時の飽和砂地盤の流動化現象は,液状化飽和砂を砂粒子と水との混合した高粘性流体とみなすことで,流体力学的手法による流動解析が可能であると考えられる.

4. あとがき

本論文は,地震発生時の高地下水水位砂質地盤において度々観察される地上構造物の急激な沈下や共同溝等の埋設構造物の浮き上がり現象に関して,液状化飽和砂地盤を土粒子~水混合体としての高粘性流体ととらえ,半無限弾性体の表面に円形等分布荷重が載荷された場合の弾性変位解に対し,粘弾性対応原理に基づく変形解析手法を示すとともに,埋設構造物の浮き上がりに伴う周辺地盤の流動化現象を粘性流体に対する流動解析を通じて検討したものである.また,解析の現象論的再現性を室内振動実験を通じて確認した.課題として,砂層の粒度分布や相対密度に応じた液状化砂の粘性係数の把握や,液状中の局所的粘弾性定数の分布の把握などが上げられる.

参考文献

- 1) 吉見吉昭:砂地盤の液状化(第2版),技報堂出版,1991
- 2) 木村孟著,最上武雄監修:土の応力伝播,土質工学基礎叢書5,鹿島出版会,1978,pp18-25
- 3) Fung,Y.C.:Foundation of Solid Mechanics, Prentice-Hall,1965,pp.421-433
- 4) W.Kaplan:Advanced Mathematics for Engineers, Addison-Wesley,1981,pp.179-210
- 5) 本間重雄・近藤博:液状化飽和砂地盤の粘弾性変形解析,第57回理論応用力学講演会論文集,日本学術会議,2008,pp.157-158
- 6) Roache,P.J.:Computational Fluid Dynamics, Hermosa Publishers,1982,pp.18-179