

半径方向衝撃外圧力を受けるアングルプライ積層円筒殻の動的安定解析

山岸 保司^{*1}・粕谷 平和^{*2}

Dynamic Stability Analysis of Angle-Ply Laminated Cylindrical Shells
Subjected to Radial Impact External Pressure

by

Yasuji YAMAGISHI and Hirakazu KASUYA

(Received on Mar. 28, 2002, accepted on Jul. 10, 2002)

Abstract

The problem of dynamic stability of angle-ply laminated cylindrical shells subjected to radial impact external pressure is described. First, the motion of cylindrical shells subjected to radial impact external pressure is defined as axially symmetric motion. Following this definition, certain perturbations are superimposed on this motion and their effect on the behavior of the shell is investigated. The symmetric state of motion of the shell is called stable if the perturbations remain bounded. The solutions for the prebuckling motion and the perturbed motion are obtained using Galerkin's method. Stable regions are determined utilizing Mathieu's equation. The inevitability of dynamically unstable behavior is proved analytically and the effects of various factors, such as external pressure ratio, lamination angle and dynamic unstable mode, are clarified.

Key words : Structural analysis, Angle-ply laminated cylindrical shells, Dynamic stability, Composite materials, Radial impact external pressure, Mathieu's equation

1. 緒 言

CFRP を代表とする高性能繊維強化複合材料は高比剛性、高比強度の優れた性能だけでなく、材料設計の可能性から航空機、宇宙機器などの薄肉構造物に幅広く適用されている^{1),2)}。薄肉構造物には、衝撃荷重が作用することが多く、それに伴う構造の動的不安定現象に関する問題を力学的に解明することは非常に重要な課題である^{3)~6)}。

そこで本論文では、両端単純支持されたアングルプライ積層円筒殻が半径方向衝撃外圧力を受ける場合について、前報⁷⁾と同様な手法を用いて、基礎方程式から Mathieu 形方程式を導き、Flügge の殻理論⁸⁾による静的座屈値を用いた Mathieu の安定判別線図を用いて、静的座屈値以下の衝撃外圧力を負荷させた場合でも、不安定モードが発生することを明らかにする。また、不安定現象に与える諸因子、例えば、積層角、負荷条件などの影響を解析的手法によって検討する。

2. 座屈解析法

2. 1 基礎式 Fig.1 に示すような半径 R 、筒長 L 、板厚 h のアングルプライ積層円筒殻が半径方向に均一な衝撃外圧力 $p(t)$ を受ける場合を考える。座標原点を円筒殻中央にとり、軸方向、

円周方向、板厚方向にそれぞれ x , y , z 軸をとる。円筒殻の中央面における面内ひずみ成分 ε_x , ε_y , γ_{xy} , 曲率成分 κ_x , κ_y , κ_{xy} と変位成分 u , v , w との関係は非線形項を考慮した有限変形理論を用いると次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

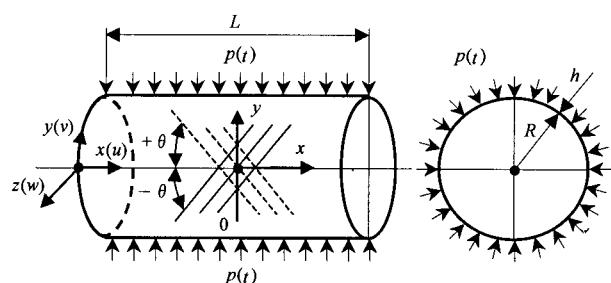


Fig.1 Configuration and coordinates of angle-ply laminated cylindrical shell.

* 1 : 工学研究科機械工学専攻博士課程前期

* 2 : 工学部動力機械工学科教授

一般的な合応力成分 N_x, N_y, N_{xy} , 合モーメント成分 M_x, M_y, M_{xy} と面内ひずみ成分, 曲率成分との関係は次式で表される。

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ここで, A_{ij} は伸張剛性マトリックス, D_{ij} は曲げ剛性マトリックス, B_{ij} は伸張と曲げのカップリング剛性マトリックスであり, これらは一方向強化材の纖維方向, 繊維に直角方向の弾性係数 $E_L, E_T, \text{ポアソン比 } \nu_L, \nu_T$, およびせん断剛性率 G_{LT} に加え, x 軸となす配向角, 積層数, 積層構成などが決定すると求められる。本報告では, 板厚方向に均質となる直交異方性アングルプライ積層円筒殻について解析するため, $A_{16}, A_{26}, D_{16}, D_{26}, B_{ij}$ ($ij=1,2,6$) 項は無視される。そして, 板厚方向の慣性力を考慮すると, 面内および面外の平衡方程式はそれぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{N_y}{R} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} &= p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで, ρ は密度を示す。式 (3) 中の面内平衡方程式を満足する Airy の応力関数 F を次のように定義する。

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

上式 (4) の応力関数 F と合モーメント成分を面外の平衡方程式に代入すると,

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ - h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ + p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。一方, 異方性材料定数 $E_x, E_y, G_{xy}, \nu_x, \nu_y$ を用い, ひずみと変位の関係から u, v を消去すると適合条件式は, 次のようになる。

$$\begin{aligned} E_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \left(2\nu_x E_y - \frac{E_x E_y}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \\ = E_x E_y \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

本論文では, 外圧力を軸対称であると仮定しているので, 初期に起こる運動は軸対称運動である。初期運動に添字 A を付けて表すと,

$$u_A = u_A(x, t), \quad v_A = 0, \quad w_A = w_A(x, t) \quad (7)$$

となり, 初期運動時の面外平衡方程式を $H(w_A)$ とおくと次式のようになる。

$$H(w_A) \equiv D_{11} \frac{\partial^4 w_A}{\partial x^4} + E_y \frac{w_A h}{R^2} + p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} = 0 \quad (8)$$

この初期運動の安定, 不安定を論ずるために, この運動に微小擾乱を与え, その時間に対する変化を調べる。この擾乱に添字 B を付けて表すと擾乱の加わった運動は,

$$u = u_A + u_B, \quad v = v_A + v_B, \quad w = w_A + w_B \quad (9)$$

となる。ここで, u_B, v_B, w_B は x, y, t の関数である。これを式 (5), (6) に代入すると, 擾乱成分に関する平衡方程式および適合条件式は次のように導かれる。

$$\begin{aligned} I(w_B) \equiv D_{11} \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_B}{\partial y^4} \\ + E_y h \frac{w_A}{R} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} + \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} + \rho h \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} E_x \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^4} - \left(2\nu_x E_y - \frac{E_x E_y}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F_B}{\partial y^4} \\ = E_x E_y \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

境界条件は,両端単純支持を想定し, 円筒殻両端 $x=\pm L/2$ での条件は, 次のようになる。

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad N_{xB} = h \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} = 0, \quad v_B = 0 \quad (12)$$

2. 2 荷重条件 円筒殻に作用する外圧力 $p(t)$ の荷重条件を次式で示す。

$$p(t) = \frac{t}{t_p} p_0 \quad (0 \leq t \leq t_p) \quad (13.1)$$

$$p(t) = p_0 \quad (t \geq t_p) \quad (13.2)$$

つまり, 外圧力が $t=0$ から作用し, $0 \leq t \leq t_p$ で直線的に作用し, t_p 時間後一定値 p_0 に保たれる。ここでは荷重の継続時間を無限と仮定している。

2. 3 初期運動 式 (8) で示した初期運動の平衡方程式の近似解を求めるにあたり, w_A の波形として静的に p_0 が作用した場合を考え, w_A を次式で仮定する。

$$w_A = a(t) h(1 + A_1 \sin ax \sinh ax + A_2 \cos ax \cosh ax) \quad (14)$$

ここで,

$$a = \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right)}} \quad (15)$$

一方、式(15)中の a の無次元量 α を次のように定める。

$$\alpha = \frac{L}{2} a = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right)}} \quad (16)$$

また、式(14)中の A_1, A_2 は式(12)の境界条件から

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{\sin \alpha \sinh \alpha}{(\cosh^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} \\ A_2 &= -\frac{\cos \alpha \cosh \alpha}{(\cosh^2 \alpha - \sin^2 \alpha)} \end{aligned} \right\} (17)$$

となる。そして初期運動のたわみ w_A 成分の時間の関数 $a(t)$ を求めるため、式(14)の w_A を式(8)に代入し、Galerkin法を用いると、

$$\int_{L/2}^{L/2} H(w_A)(1 + A_1 \sin \alpha x \sinh \alpha x + A_2 \cos \alpha x \cosh \alpha x) dx = 0 \quad (18)$$

となり、 $a(t)$ に関する2階常微分方程式が次のように得られる。

$$\rho h^2 (Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + h \left\{ \frac{E_y h}{R^2} (Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2) + \left(\frac{2}{L} \right)^4 D_{11} (C_1 Y_1 + C_2 Y_2) \right\} a(t) + p(t) Y_0 = 0 \quad (19)$$

ただし、各種記号は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} B_1 &= -2\alpha^2 A_2 & C_1 &= -4\alpha^4 A_1 \\ B_2 &= 2\alpha^2 A_1 & C_2 &= -4\alpha^4 A_2 \\ Y_0 &= 1 + \frac{(A_1 + A_2) \sin \alpha \cosh \alpha - (A_1 - A_2) \cos \alpha \sin \alpha}{2\alpha} \\ Y_1 &= \frac{\sin \alpha \cosh \alpha - \cos \alpha \sinh \alpha}{2\alpha} - \frac{A_1}{8} \left(2 - \frac{\sin 2\alpha - \sinh 2\alpha}{\alpha} \right) \\ &\quad - \frac{(A_1 - A_2) \sin 2\alpha \cosh 2\alpha + (A_1 + A_2) \cos 2\alpha \sinh 2\alpha}{16\alpha} \\ Y_2 &= \frac{\sin \alpha \cosh \alpha + \cos \alpha \sinh \alpha}{2\alpha} + \frac{A_1}{8} \left(2 + \frac{\sin 2\alpha + \sinh 2\alpha}{\alpha} \right) \\ &\quad + \frac{(A_1 + A_2) \sin 2\alpha \cosh 2\alpha - (A_1 - A_2) \cos 2\alpha \sinh 2\alpha}{16\alpha} \end{aligned} \right\} (20)$$

また、時間 t, t_p を次のように無次元化する。

$$\tau = \frac{t}{R} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}}, \quad \tau_p = \frac{t_p}{R} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \quad (21)$$

そして、式(13.1), (13.2)を式(19)に代入すると、

$$\frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} + \left(q + r \frac{\tau}{\tau_p} \right) a(\tau) + s \frac{\tau}{\tau_p} = 0 \quad (0 \leq \tau \leq \tau_p) \quad (22.1)$$

$$\frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} + (q + r) a(\tau) + s = 0 \quad (\tau \geq \tau_p) \quad (22.2)$$

ここで、式中の q, r, s は各種衝撃負荷形態時の解析式⁵⁾より求められ、衝撃外圧負荷の場合には、簡略化された次式となる。

$$\left. \begin{aligned} q &= 1 + \frac{D_{11}}{h} \frac{R^2}{E_y} \left(\frac{2}{L} \right)^4 \frac{C_1 Y_1 + C_2 Y_2}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} \\ r &= 0 \\ s &= \left(\frac{R}{h} \right)^2 \frac{[T]}{E_y} \frac{Y_0}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} I \end{aligned} \right\} (23)$$

初期条件は、 $\tau=0$ で

$$a(\tau) = 0, \quad \frac{da(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (24)$$

ここで円筒殻に作用する衝撃外圧力 p_0 と外圧力を受けるアングルプライ積層円筒殻の非対称変形を呈する静的座屈値 p_s との比を荷重比 $I (= p_0/p_s)$ とする。また、式(23)中の固有ベクトル $[T]$ は外圧力を受けるアングルプライ積層円筒殻^{9),10)}の静的座屈応力であり、Flüggeの殻理論による解析式は次のようになる。

$$\left| \begin{array}{ccc} H_{11} - n^2 N_e & H_{12} & H_{13} + \lambda N_e \\ H_{12} & H_{22} - n^2 N_e & H_{23} - n N_e \\ H_{13} + \lambda N_e & H_{23} - n N_e & H_{33} - n^2 N_e \end{array} \right| = 0 \quad (25)$$

解法は、上式を係数行列式から一般固有値問題に帰着させ、軸方向半波数 m 、円周方向波数 n を変化させて得られる N_e の正の最小値が座屈合応力であり、 $p_s = N_e/R = [T]$ で示される。なお式中の $\lambda (= m \pi R/L)$ は軸方向半波長、 H_{ij} ($ij=1,2,3$)は形状パラメータ、各種剛性値からなる項である。

初期条件式(24)のもとで式(22.1), (22.2)を解けば $a(\tau)$ が求まる。 $0 \leq \tau \leq \tau_p$ のときは、

$$a(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \left(\frac{\tau}{\tau_p} \right)^k \quad (26)$$

なる級数展開を行い、式(26)を式(22.1)に代入して係数比較することにより a_k^* が求まる。初期条件式(24)を考慮すると、

$$\left. \begin{aligned} a_1^* &= 0, & a_2^* &= 0, & a_3^* &= -\frac{s \tau_p^2}{6} \\ a_k^* &= -\frac{(q \cdot a_{k-2}^* + r \cdot a_{k-3}^*) \tau_p^2}{k(k-1)} & (k = 4, 5, 6, \dots) \end{aligned} \right\} (27)$$

となる。 $\tau=\tau_p$ のときの $a(\tau), da(\tau)/d\tau$ の値をそれぞれ ξ_1, ξ_2 とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= a(\tau_p) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \\ \xi_2 &= \left(\frac{da(\tau)}{d\tau} \right)_{\tau=\tau_p} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^* k}{\tau_p} \end{aligned} \right\} (28)$$

が導かれる。一方 $\tau \geq \tau_p$ のときは、式(28)から、

$$K = -\frac{s}{q+r}, \quad \Omega = \sqrt{q+r} \quad (29)$$

とすると、初期運動たわみ w_A の無次元化された時間成分 $a(\tau)$ は次式のように導かれる。

$$a(\tau) = K \{ 1 - \eta \cos(\Omega \tau + \delta) \} \quad (30)$$

η, δ は未定係数で式(28)から次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \sqrt{\left(\frac{\xi_1}{K} - 1\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{K\Omega}\right)^2} \\ \delta &= \cos^{-1} \left\{ \frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\xi_1}{K} \right) \right\} - \Omega \tau_p \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

2.4 初期運動の安定判別 初期運動の安定、不安定を論ずるにあたり、微小擾乱 u_B, v_B, w_B を初期運動に加え、その不安定現象を調べる。境界条件式 (12) を満足する変形様式として、 w_B, F_B を次式で仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u_B &= U_B(x, t) \sin \frac{ny}{R}, \quad v_B = V_B(x, t) \cos \frac{ny}{R} \\ w_B &= b(t) h \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R}, \quad F_B = f_B(x, t) \sin \frac{ny}{R} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここで、 m は軸方向半波数、 n は円周方向波数を表す（ただし、 $m : \text{odd}$, $n : \text{integer}$ ）。満たすべき残りの境界条件は、式 (12) の後者 2 つの面内境界条件が $x = \pm L/2$ の場合において、

$$\frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} = 0 \quad (33)$$

が導かれる。

2.5 応力関数 F_B の算出 適合条件式 (11) に式 (32) を代入し、求まった f_B を式 (32.4) に代入することで応力関数 F_B が次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} F_B &= \frac{E_y L^2 h}{R} b(t) \left[-\frac{(m\pi)^2}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (\ell L)^4} \cos \frac{m\pi x}{L} \right. \\ &\quad + a(t) \frac{n^2}{4} \frac{h}{R} \left\{ F_1 \cosh m_1 x + F_2 \cosh m_2 x \right. \\ &\quad + H_1 \sin \left(a + \frac{m\pi}{L} \right) x \sinh ax + H_2 \sin \left(a - \frac{m\pi}{L} \right) x \sinh ax \\ &\quad \left. \left. + J_1 \cos \left(a + \frac{m\pi}{L} \right) x \cosh ax + J_2 \cos \left(a - \frac{m\pi}{L} \right) x \cosh ax \right\} \right] \\ &\quad \times \sin \frac{ny}{R} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

ただし、各種記号は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} k^2 &= \left(\frac{E_y}{G_{yy}} - 2\nu_y \right) \left(\frac{n}{R} \right)^2, \quad \ell^4 = \frac{E_y}{E_x} \left(\frac{n}{R} \right)^4 \\ m_1 &= \sqrt{\frac{k^2 + \sqrt{k^4 - 4\ell^4}}{2}}, \quad m_2 = \sqrt{\frac{k^2 - \sqrt{k^4 - 4\ell^4}}{2}} \\ H_1 &= \frac{\gamma_1 B_1 - \delta_1 B_2}{2(\gamma_1^2 + \delta_1^2)}, \quad H_2 = \frac{\gamma_2 B_1 - \delta_2 B_2}{2(\gamma_2^2 + \delta_2^2)} \\ J_1 &= \frac{\delta_1 B_1 + \gamma_1 B_2}{2(\gamma_1^2 + \delta_1^2)}, \quad J_2 = \frac{\delta_2 B_1 + \gamma_2 B_2}{2(\gamma_2^2 + \delta_2^2)} \\ \gamma_1 &= \left(\alpha + \frac{m\pi}{2} \right)^4 - 6\alpha^2 \left(\alpha + \frac{m\pi}{2} \right)^2 + \alpha^4 + \left(\frac{KL}{2} \right)^2 \left\{ \left(\alpha + \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right\} + \left(\frac{\ell L}{2} \right)^4 \\ \gamma_2 &= \left(\alpha - \frac{m\pi}{2} \right)^4 - 6\alpha^2 \left(\alpha - \frac{m\pi}{2} \right)^2 + \alpha^4 + \left(\frac{KL}{2} \right)^2 \left\{ \left(\alpha - \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right\} + \left(\frac{\ell L}{2} \right)^4 \\ \delta_1 &= 4\alpha \left\{ \left(\alpha + \frac{m\pi}{2} \right)^3 - \alpha^2 \left(\alpha + \frac{m\pi}{2} \right) \right\} + \frac{\alpha(kL)^2}{2} \left(\alpha + \frac{m\pi}{2} \right) \\ \delta_2 &= 4\alpha \left\{ \left(\alpha - \frac{m\pi}{2} \right)^3 - \alpha^2 \left(\alpha - \frac{m\pi}{2} \right) \right\} + \frac{\alpha(kL)^2}{2} \left(\alpha - \frac{m\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

また、 F_1, F_2 は境界条件式 (33) より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= \frac{m_2^2 Q_1 - (2/L)^2 Q_2}{(m_1^2 - m_2^2) \cosh(m_1 L/2)} \\ F_2 &= \frac{(2/L)^2 Q_2 - m_1^2 Q_1}{(m_1^2 - m_2^2) \cosh(m_2 L/2)} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &= \{(H_1 - H_2) \cos \alpha \sinh \alpha - (J_1 - J_2) \sin \alpha \cosh \alpha\} \sin \frac{m\pi}{2} \\ Q_2 &= \left[\left[- \left\{ \left(\alpha + \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right\} H_1 - 2\alpha \left(\alpha + \frac{m\pi}{2} \right) J_1 \right. \right. \\ &\quad + \left. \left. \left\{ \left(\alpha - \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right\} H_2 + 2\alpha \left(\alpha - \frac{m\pi}{2} \right) J_2 \right] \cos \alpha \sinh \alpha \right. \\ &\quad + \left. \left[- 2\alpha \left(\alpha + \frac{m\pi}{2} \right) H_1 + \left\{ \left(\alpha + \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right\} J_1 \right. \right. \\ &\quad + \left. \left. 2\alpha \left(\alpha - \frac{m\pi}{2} \right) H_2 - \left\{ \left(\alpha - \frac{m\pi}{2} \right)^2 - \alpha^2 \right\} J_2 \right] \sin \alpha \cosh \alpha \right] \\ &\quad \times \sin \frac{m\pi}{2} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

2.6 摆乱の方程式 $\tau \geq \tau_p$ における初期運動の安定性問題を考える。式 (10) の平衡方程式に応力関数のほか、各諸値を代入し Galerkin 法を適用すると、次式のようになる。

$$\int_0^{2\pi R} \int_{-L/2}^{L/2} I(w_B) \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} dx dy = 0 \quad (38)$$

上式を解くことによって $b(t)$ に関する Mathieu 形方程式が得られる。ここで、

$$\zeta = \Omega \tau + \delta \quad (39)$$

で表される時間の無次元量 ζ を導入すると、

$$\frac{d^2 b(\zeta)}{d\zeta^2} + (\phi + \psi \cos \zeta) b(\zeta) = 0 \quad (40)$$

となる。ただし、

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\Omega^2} \frac{h}{R} \left[\left(\frac{R}{L} \right)^4 \frac{1}{Rh^2} \right. \\ &\quad \times D_{11}(m\pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi)^2(nL/R)^2 + D_{22}(nL/R)^4 \left. \right] \\ &\quad + \frac{R}{h} \frac{(m\pi)^4}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (\ell L)^4} + Kn^2 W_1 \\ \psi &= \frac{1}{\Omega^2} Kn^2 \eta \frac{h}{R} W_1 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

式 (41) の Mathieu 係数 ϕ, ψ は、円筒殻の幾何学的形状、各種剛性値および荷重条件が定まるときの m, n のみの関数となるので、 m, n を順次変化させそれに対する安定判別を行う。なお、式 (41) 中の W_1 は紙面の都合上省略する⁵⁾。安定、不安定の境界は $b(\zeta)$ が周期 2π または 4π を持つときの ϕ, ψ が境界上にあると定められている¹¹⁾。それらの周期解を示すことによって得られる Mathieu の安定判別線図を Fig.2 に示す。白い領域が安定領域、斜線の部分が不安定領域となる。

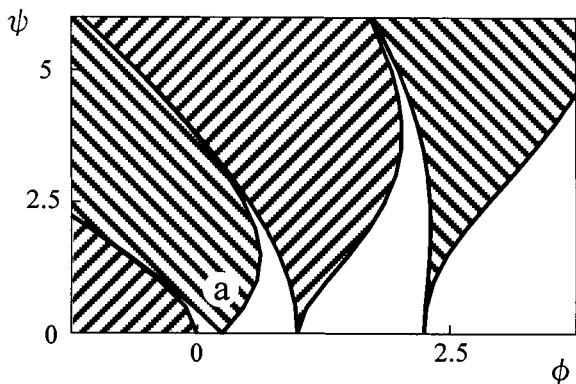


Fig.2 Mathieu's stability diagram.

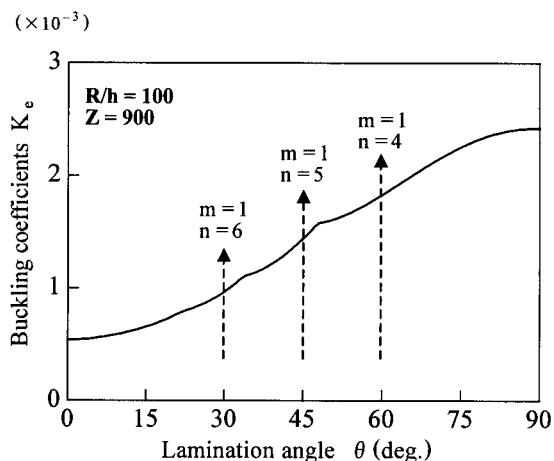
3. 数値計算例と解析結果の検討

数値計算例として、炭素繊維強化プラスチックス(CFRP材)を考える。その基本的弾性定数(繊維容積含有率 $V_f=60\%$)は、平均化近似法による式により計算され、実験でも確かめられた次の値である¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned} E_L &= 137 \text{ (GPa)}, \quad E_T = 8.17 \text{ (GPa)} \\ G_{LT} &= 4.75 \text{ (GPa)}, \quad \nu_L = 0.316, \quad \nu_T = 0.0189 \\ \rho &= 1540 \text{ (kg/m}^3\text{)} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

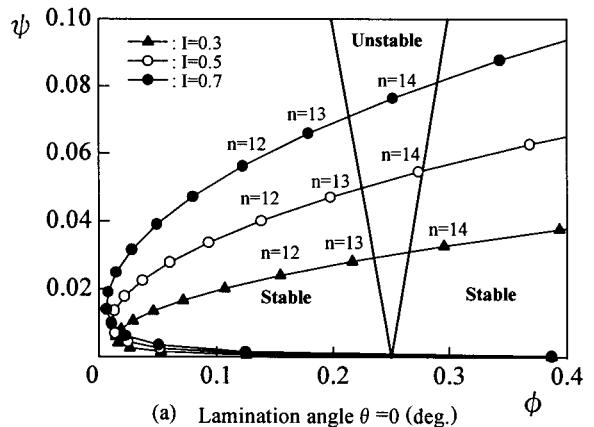
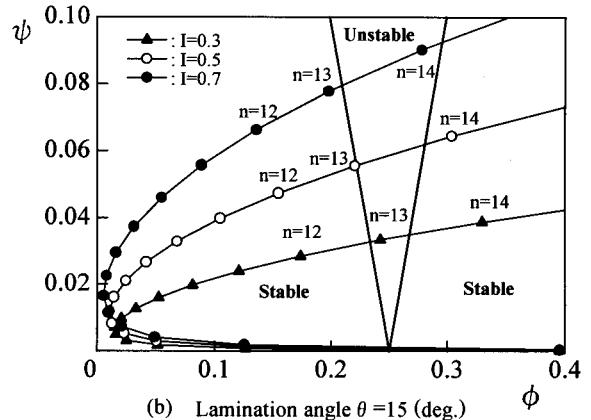
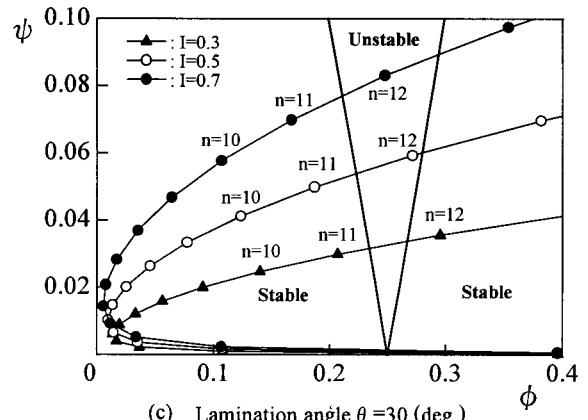
半径方向外圧力を受けるアングルプライ積層円筒殻の静的座屈値を無次元化($K_c = p_s R/E_T h$)し、形状パラメータ $Z (=L^2/Rh)=900$ 、 $R/h=100$ の場合について、Fig.3に示す。軸方向半波数 m は R/h 、 Z 、積層数 N に無関係にすべて1波で励起している。そこで上記の内容を考慮し、衝撃外圧力が作用したとき、不安定現象解析では軸方向半波数 m は1で励起すると考えられるため、数値計算では $m=1$ とした。

また、静的座屈外圧力より低い外圧力が動的に作用する場合、円周方向波数 n は放物線状に存在し、 n の増大に伴い ψ 、 ϕ の値も大きくなるが、ほとんどの波形モードが安定領域に含まれるため、Mathieuの安定判別線図において、もっとも広く重要なFig.2の第一不安定領域a近傍について検討する。

Fig.3 Variation of buckling coefficients of angle-ply laminated cylindrical shells with lamination angle θ .

数値計算の一例として、Mathieu形方程式の無次元係数 ϕ 、 ψ の関係について、形状パラメータ $R/h=100$ 、 $Z=900$ のアングルプライ積層円筒殻の場合について示す。

Fig.4に示すように、積層角 θ を0~45(deg.)まで変化させた場合、不安定領域における円周方向波数 n は減少し、45~90(deg.)まで変化させた場合、 n は増大する傾向がある。また、積層角の増大に伴い不安定領域が狭く、つまり ψ の値が減少している。これは、波形モードが不安定領域に入りにくくなることを意味しており、積層角 $\theta=90(\text{deg.})$ の場合が半径方向衝撃外圧力時には優れていると言える。このことは静的座屈解析時と定性的に一致しており、積層角の変化に伴う円周方向剛性(伸張剛性 A_{22} 、

(a) Lamination angle $\theta = 0$ (deg.)(b) Lamination angle $\theta = 15$ (deg.)Fig.4 Variation of unstable region of angle-ply laminated cylindrical shells with wave mode n .

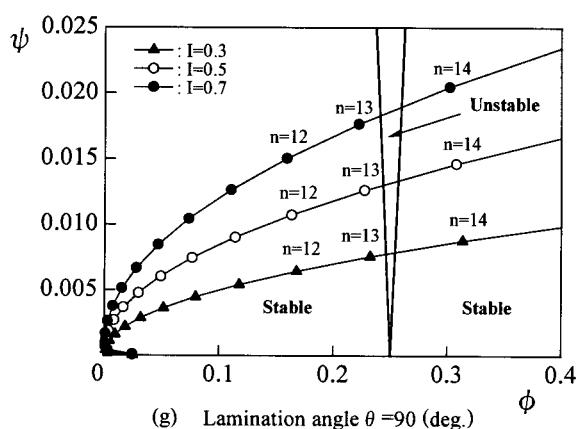
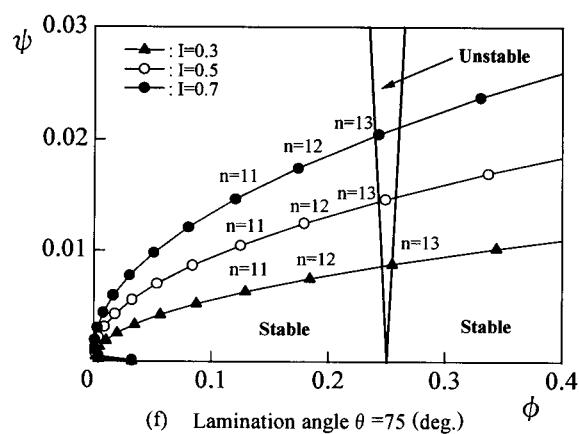
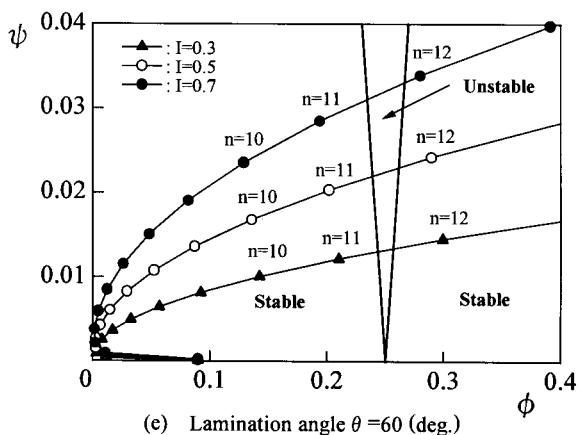
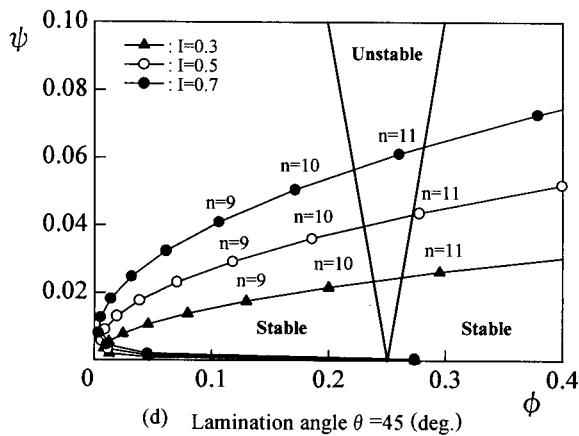


Fig.4 (Continued.)

曲げ剛性 D_{22}) の増加が、擾乱振動を抑えたために不安定領域が減少したと考えられる。なお、他の剛性項の変化による不安定領域への影響は少ない。また円周方向波数 n は外圧力を受け、静的座屈を起こす場合の波形モードに比べ、半径方向衝撃外圧力を受け、動的不安定となる場合の波形モードは非常に大きな値となっている。

次に荷重比 I の影響をみると、積層角 θ にかかわらず、荷重比の増大に伴い、不安定領域に現れる円周方向波数 n は、 ψ が高次の不安定モードに遷移していく。本論文では、最小荷重比を 0.3 の場合で行っているが、いずれの場合もこのように静的座屈応力より低い値で不安定となるモードを確認することができた。

4. 結 言

本論文は、半径方向衝撃外圧力を受けるアングルプライ積層円筒殻について、構造の安定性という観点から検討した。静的座屈応力を Flüge の殻理論を用いて解析し、Mathieu 形方程式を導き、Mathieu の安定判別を実施した。そして、座屈前軸対称運動を考慮することで、構造不安定領域を積層構成の影響とともに示し、静的座屈値と比較して低い衝撃外圧力を受けた場合においても構造不安定となる可能性を示した。材料定数には、複合材料構造であるので異方性をパラメータにするには膨大な図面を必要とするので、代表的な CFRP 材を用い、特に前報では取り上げなかった波形モードの不安定領域に対する遷移傾向について呈示した。

参考文献

- 1) R. M. Jones : "Mechanics of Composite Materials", Chap.4 , Mc Graw-Hill (1975).
- 2) I.Scheinman and Y.Goldfeld : Buckling of Laminated Cylindrical Shells in Term of Different Theories and Formulations, AIAA J. , Vol.39, No.9 (2001), 1773.
- 3) 永井健一, 八巻昇 : 周期的な圧縮荷重をうける円筒かくの動的安定, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.45, No.395 (1979), 791.
- 4) 永井健一, 八巻昇 : 周期外圧をうける円筒かくの動的不安定に及ぼす軸対称振動の影響, 日本機械学会論文集 C 編, Vol.53, No.491 (1987), 1309.
- 5) 粕谷平和, 根本圭一 : 衝撃軸圧縮荷重を受ける複合材料積層円筒殻の動的応答, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.59, No.558 (1993), 454.
- 6) 粕谷平和, 根本圭一 : 周期的軸圧縮荷重を受ける積層円筒殻の動的応答, 日本複合材料学会誌, Vol.19, No.5 (1993), 189.
- 7) 粕谷平和, 松岡一雄 : 衝撃外圧力を受けるアングルプライ積層円筒殻の動的安定性, 材料, Vol.48, No.12 (1999), 1367.
- 8) W.Flüge : "Stresses in Shells", Springer-Verlag (1962).
- 9) 粕谷平和, 植村益次 : 積層複合円筒殻の外圧による座屈, 材料, Vol.34, No.378 (1985), 262.
- 10) 粕谷平和, 植村益次 : 積層複合円筒殻の半径方向外圧による座屈に及ぼす積層構成効果, 日本複合材料学会誌, Vol.12, No.2 (1986), 73.
- 11) N.W.McLachan : "Theory and Application of Mathieu Function", Dover Publications, Inc. (1964).
- 12) 植村益次, 山田直樹 : 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24, No.257 (1975), 156.