

周期的静水圧力を受ける繊維強化積層円筒殻の動的安定解析

根本 圭一*¹・粕谷 平和*²

Analysis of Dynamic Stability of Fiber-Reinforced Laminated Cylindrical Shells

Subjected to Periodic Hydrostatic Pressure

by

Keiichi NEMOTO and Hirakazu KASUYA

(Received on Sep. 27, 2004, accepted on Dec. 22, 2004)

Abstract

This paper deals with the problem of the dynamic stability of fiber-reinforced laminated cylindrical shells subjected to static and periodic hydrostatic pressure. First, the axially symmetric motion of the shell under loading is determined. Subsequently, certain perturbations are superimposed on this motion, and their behavior with respect to time is investigated. The symmetric state of the motion of the shell is called stable if the perturbations remain bounded. The solutions for the prebuckling motion and the perturbed motion are obtained by means of Galerkin's method. Stability regions are examined by utilizing Mathieu's equation. The inevitability of dynamically unstable behavior is proved analytically and the effects of various factors, such as the configuration parameter, the vibration amplitude and the dynamic unstable mode, are clarified.

Keywords: Structural analysis, Composite laminated cylindrical shell, Dynamic stability, Periodic hydrostatic pressure, Mathieu's Equation

1. 緒言

航空機およびロケットなどにおいては、構造の軽量化が極限まで要求されており金属材料に代わって、比強度、比剛性の高い先進複合材料と呼ばれる CFRP（カーボン繊維強化プラスチック）などからなる積層複合方式が一次構造材として採用されようとしており注目を浴びている。このような構造体には、多様な周期的な変動荷重が作用されることが多いため、動的安定問題を解明する事が非常に重要である一方、力学的にも未解明のものも多く、設計上の観点からも非常に重要な問題である。

従来、多くの研究者が示しているように、周期的な変動荷重を受ける薄肉円筒殻の動的安定問題においては、係数励振による曲げ振動が励起される際の加振振幅と振動数との組合せ、すなわち安定境界を求めることが、基本的な課題の一つであり、等方性円筒殻に関する研究報告については、さまざまな解析例がある¹⁾。

著者らは、周期的負荷を受ける繊維強化積層円筒殻の動的安定性について、基礎方程式から Mathieu 型方程式を導き、Mathieu

の安定判別を用いて、動的不安定に及ぼす各種パラメータの影響について論じた²⁾⁻⁵⁾。

本論文では一方向繊維強化積層円筒殻のモデルを用い、周期的静水圧力を受ける際の動的安定性について理論的に検証する。そして、既報で解析した静的座屈値を Flugge の殻理論⁶⁾により解析し、動的安定解析式を改善する。また、形状パラメータ、振動パラメータが動的安定性へ与える影響について示す。

2. 動的安定解析法

2.1 基礎となる関係式

Fig.1 に示すような半径 R 、筒長 L 、板厚 h の繊維強化積層円筒殻の中央に原点を取り、軸・円周・半径方向にそれぞれ x , y , z 軸をとる。中央面における面内ひずみ成分 ε_x , ε_y , γ_{xy} 、曲率成分 κ_x , κ_y , κ_{xy} と変位成分 u , v , w との関係は 2 次の微小項を考慮した有限変形理論を用いると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} + (w_{,x})^2 / 2, \quad \varepsilon_y = v_{,y} + w / R + (w_{,y})^2 / 2 \\ \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* 1 : 横浜ゴム株式会社 航空部品技術部

* 2 : 工学部動力機械工学科教授

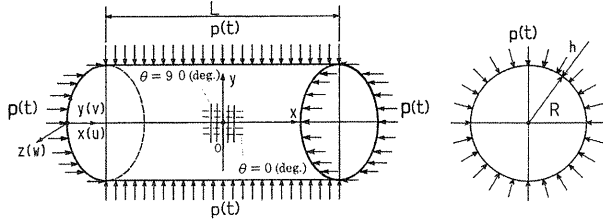


Fig.1 Configuration and coordinates of fiber-reinforced laminated cylindrical shells.

$$\kappa_x = -w_{,xx}, \quad \kappa_y = -w_{,yy}, \quad \kappa_{xy} = -2w_{,xy} \quad (2)$$

ここで、添字“ x ”, “ y ”は x , y に関する偏微分を表す。解析方法は、板厚方向の慣性力のみを考慮し、面内平衡方程式を満足する応力関数 F と合モーメント成分を板厚方向の平衡方程式へ代入する。さらに、初期に起こる運動を軸対称運動で仮定し、初期運動に添字 A 、擾乱成分に添字 B を付けて表す。ここで、擾乱成分を微小であると仮定し、その非線形項を省略すると初期運動の運動方程式、擾乱の運動方程式および適合方程式はそれぞれ次式で表される^{3),4)}。

$$H(w_A) \equiv D_{11}w_{A,xxxx} + E_y w_A h / R^2 + N_x(t)w_{A,xx} - \nu_y N_x(t) / R + p(t) + \rho h w_{A,tt} = 0 \quad (3)$$

$$I(w_B) \equiv D_{11}w_{B,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{B,xyxy} + D_{22}w_{B,yyyy} - E_y h w_A w_{B,yy} / R + h F_{B,xx} / R - h F_{B,yy} w_{A,xx} + N_x(t)w_{B,xx} + \nu_y N_x(t)w_{B,yy} + \rho h w_{B,tt} = 0 \quad (4)$$

$$E_x F_{B,xxxx} - (2\nu_y E_x - E_x E_y / G_{xy}) F_{B,xyxy} + E_y F_{B,yyyy} = E_x E_y \{ w_{B,xx} / R - w_{A,xx} w_{B,yy} \} \quad (5)$$

ここで、式(3)~(5)中の E_x および E_y はヤング率、 G_{xy} はせん断剛性率、 ν_x , ν_y はポアソン比、 ρ は密度、 D_{ij} ($i, j=1,2,6$)は曲げ剛性 η 、 $N_x(t)$ は静水圧力時の軸力、 $p(t)$ は静水圧力の半径方向圧力、そして、 F は一般の応力関数を表し、添字“ t ”は t に関する偏微分を表す。境界条件は、両端単純支持(S-2)を想定し、両端 $x = \pm L/2$ での条件は次のようになる。

$$w = 0, \quad w_{,xx} = 0, \quad N_{xB} = 0, \quad \nu_B = 0 \quad (6)$$

2. 2 積層円筒殻への負荷条件

繊維強化積層円筒殻に作用する周期的静水圧力 $p(t)$ および静水圧力による軸力 $N_x(t)$ の負荷条件を次式にて示す。

$$\left. \begin{aligned} p(t) &= p_0 (b_0 \cos \omega t + d_0) \\ N_x(t) &= p(t)R/2 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで、 b_0 , d_0 は定数である。つまり、静的な静水圧力に周期的静水圧力が加わる場合を想定している。これらの定数を変える事により、任意の負荷状態を表す事ができる。

2. 3 動的安定解析法

2. 3. 1 初期運動に関する定式化

式(6)の境界条件を満足するように、初期運動の変形を次式にて仮定する。変形は筒長の中央点($x=0$)に関して対称であるという仮定を用いる。

$$w_A = \sum_{j=\text{odd}} a_j(t) h \cos(j\pi x / L) \quad (8)$$

式(8)を式(3)に代入し、Galerkin法を適用し、さらに構造減衰係数 η を導入し、係数を比較することで、初期運動の式(8)中の $a_j(t)$ が定まる。

2. 3. 2 初期運動方程式における安定判別法

初期運動方程式の安定、不安定を論ずるにあたり、擾乱変位 u_B , ν_B , w_B を初期運動に加え、その応答について検討する。境界条件式(6)を満足する変形様式として、 w_B および F_B を次式のように仮定する。

$$w_B = b(t) h \cos(m\pi x / L) \sin(ny / R) \quad (9)$$

$$F_B = f_B(x, t) \sin(ny / R) \quad (10)$$

ここで、式(9),(10)中の m は軸方向半波数、 n は円周方向波数を表し、 m は奇数、 n は整数値である。そして、式(9), (10)を式(5)へ代入すると以下のようになる。

$$\begin{aligned} & f_{B,xxxx} - (E_y / G_{xy} - 2\nu_y)(n/R)^2 f_{B,xx} + (E_y / E_x)(n/R)^4 f_B \\ &= -(E_y h / L^2 R) b(t) \\ & \left[(m\pi)^2 \cos(m\pi x / L) + (n^2 h / R) \sum_{j=\text{odd}} (j\pi)^2 a_j(t) / 2 \right. \\ & \left. \{ \cos(j+m)\pi x / L + \cos(j-m)\pi x / L \} \right] \end{aligned} \quad (11)$$

上式(11)の4階偏微分方程式を f_B について解き、これを式(10)へ代入すると、求める応力関数 F_B が次式のように求められる。

$$\begin{aligned}
 F_B = & (E_y L^2 h / R) b(t) [(h / R) \{F_1 \cosh m_1 x + F_2 \cosh m_2 x\} \\
 & + X_2(m) \cos(m\pi x / L) - (n^2 h / R) \sum_{j=\text{odd}} (j\pi)^2 a_j(t) / 2 \\
 & [X_1(j-m) \cos\{(j-m)\pi x / L\} \\
 & + X_1(j+m) \cos\{(j+m)\pi x / L\}] \sin(ny / R) \quad (12)
 \end{aligned}$$

ここで、式(12)中の $X_1(\alpha)$, $X_2(\alpha)$ は α に関する関数となり、 m_1 , m_2 は材料定数等によって決定される値である。また、 F_1 , F_2 は境界条件式(6)により求められるが、本論文では紙面の都合上省略する³⁾。そして、式(12)で求めた F_B および式(9)の w_B を式(4)に代入し、Galerkin 法を用いると $b(t)$ に関する方程式が得られる。いま、 $\Theta = \omega t$ とおくと、 $b(\Theta)$ に関する Mathieu 型方程式が得られ、さらに三角関数の公式により、つぎのように整理される。

$$\frac{d^2 b(\zeta)}{d\zeta^2} + (\phi + \psi \cos \zeta) b(\zeta) = 0 \quad (13)$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 \phi = & \frac{1}{(\omega / \omega_0)^2} \frac{E_y h}{[K]} \frac{h}{R} \left[n^2 \sum_{j=\text{odd}} A_j Z_{1j} + \frac{(m\pi)^2}{Rh} X_2(m) + \frac{R}{h} \frac{1}{L^4 h} \right. \\
 & \left. \frac{D_{11}(m\pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi)^2 (nL/R)^2 + D_{22}(nL/R)^4}{E_y} \right. \\
 & \left. - \frac{[H]}{E_y h} \frac{d_0 R^2}{2hL^2} \frac{p_0}{p_s} \left\{ (m\pi)^2 + \nu_y \left(\frac{nL}{R} \right)^2 \right\} \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\psi = \sqrt{\psi_1^2 + \psi_2^2}, \zeta = \Theta - \tan^{-1}(\psi_1 / \psi_2) \quad (15)$$

$$\psi_1 = \frac{1}{(\omega / \omega_0)^2} \frac{E_y h}{[K]} \frac{h}{R} n^2 \sum_{j=\text{odd}} B_j Z_{1j} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 \psi_2 = & \frac{1}{(\omega / \omega_0)^2} \frac{E_y h}{[K]} \frac{h}{R} \left[n^2 \sum_{j=\text{odd}} C_j Z_{1j} \right. \\
 & \left. - \frac{[H]}{E_y h} \frac{b_0 R^2}{2hL^2} \frac{p_0}{p_s} \left\{ (m\pi)^2 + \nu_y \left(\frac{nL}{R} \right)^2 \right\} \right] \quad (17)
 \end{aligned}$$

ここで、式(14)、(16)および(17)中の A_j , B_j , C_j は初期運動 $a_j(t)$ の各係数であり、 Z_{1j} は式(13)を誘導する際、Galerkin 法で得られる係数である³⁾、⁴⁾。また、上式中の p_s は静水圧力を受ける異方性積層円筒殻の静的静水座屈圧力⁸⁾であり、Flügge 殻理論による解析解は次式のように示され、さらに、 ω_0 は第一次の自由振動数⁹⁾を表す。

$$\begin{vmatrix}
 H_{11} - n_p^2 N_e - \lambda^2 N_a & H_{12} & H_{13} + \lambda N_e \\
 H_{12} & H_{22} - n_p^2 N_e - \lambda^2 N_a & H_{23} - n_p N_e \\
 H_{13} + \lambda N_e & H_{23} - n_p N_e & H_{33} - n_p^2 N_e - \lambda^2 N_a
 \end{vmatrix} = 0 \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \omega_0^2 = & \frac{1}{\rho h} \left\{ K_{33} + \frac{2K_{12}K_{13}K_{23} - K_{11}K_{23}^2 - K_{22}K_{13}^2}{K_{11}K_{22} - K_{12}^2} \right\} \\
 = & [K] / \rho h \quad (19)
 \end{aligned}$$

なお、 p_s を座屈時静水圧力とし、 N_a は軸方向膜力 ($=p_s R/2$)、 N_e は円周方向膜力 ($=p_s R$) である。式(18)の解法は係数行列式から一般固有値問題へ帰着させ、軸方向半波数 m_p 、円周方向波数 n_p を変化させて得られる p_s の正の最小値が座屈圧力であり、 $p_s = [H]$ で示される。なお、式中の $\lambda (=m_p \pi R/L)$ は軸方向半波長、 H_{ij} ($i, j=1, 2, 3$) は形状パラメータ、各種剛性値からなる項であり、式(19)も弾性定数の他に形状パラメータの関数であり、各種の波数の整数値に対する最小値が固有値となる。

3. 数値計算例と解析結果の検討

数値計算に用いた炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材の弾性定数は平均化近似解析法¹⁰⁾によって求められた値であり、構成素材の特性が与えられれば代数式で得られ、実験でも確認された値は次の値である。

$$\left. \begin{aligned}
 E_L = 137 \text{ (GPa)}, E_T = 8.17 \text{ (GPa)} \\
 G_{LT} = 4.75 \text{ (GPa)}, \nu_L = 0.316, \nu_T = 0.0189 \\
 \rho = 1.54 \times 10^3 \text{ (kg/m}^3\text{)}
 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

式(13)に示される Mathieu 係数 ϕ , ψ は円筒殻の幾何学的形状、各種剛性値、負荷条件および振動条件が決定されると、不安定モード m , n のみの関数となる。従来、著者らを含め、多くの研究者が指摘しているように、円筒殻が十分に薄肉の場合には面内および回転慣性力の影響はいずれも無視することができるので本解析モデルの積層円筒殻に適用し、半径方向すなわち面外慣性力のみを考慮した。一方、著者の一人⁹⁾が以前に報告した複合材料積層円筒殻の振動特性において、軸方向半波数は板厚方向に均質な直交異方性の一方向積層円筒殻では、形状パラメータ R/h , $Z(=L^2/Rh)$ に無関係に 1 を示している。そこで、上記のことを考慮すると、周期的静水圧力が直交異方性積層円筒殻に作用したときの固有振動数との連成効果による不安定挙動解析では、軸方向半波数 m は 1 で励起すると考えられるため、数値計算では $m=1$ とした。そして、 n が大きくなると ϕ , ψ も大きくなるが、放物線状に変化するため、ほとんどのモードが安定領域に含まれる。

数値計算の一例として、Mathieu 型方程式の無次元係数 ϕ 、 ψ の関係について示す。静的および周期的静水圧力が作用する場合を考えるため、式(7)中の d_0 を 1.0 とし、加振振幅 b_0 は任意の値を導入している。構造減衰係数 η^{11} は 0.02 を用い、負荷条件の影響を見るために負荷する周期的静水圧力 p_0 と静的静水座屈圧力 p_s との比率（以後、圧力比と呼ぶ）が 5.0 の場合について実施した。

第一に、圧力比 5.0、振動数 ω と第一次の自由振動数 ω_0 との比率が 0.1、加振振幅 b_0 が 0.05 の場合を Fig.2 に示し、形状パラメータ $Z(=L^2/Rh)=900$ と固定し、 R/h の比率を 50, 100, 200, 500 と変化させ、その影響を見るために、(a)~(d)にそれぞれ示す。

さらに、本解析モデルである板厚方向に均質な一方向積層円筒殻の積層角 θ の影響および振動パラメータが動的安定性へ与える影響について、形状パラメータ $R/h=100$, $Z=900$, 圧力比 5.0, 振動数比 $\omega/\omega_0=0.1$ と固定し、加振振幅 b_0 を 0.05, 0.1, 0.2,

0.3 と変化させ、それぞれ Fig.3~6 に示し、積層角 $\theta=0(\text{deg.})$ を (a)に、 $\theta=90(\text{deg.})$ を (b)に示す。

Fig.2 に示されるように、Mathieu 型方程式の係数 ϕ 、 ψ に及ぼす形状パラメータ R/h の影響はない。これは、式(14)の ϕ 、式(15)の ψ に関する式が形状パラメータの影響をなくす無次元化をしたためであると考えられる。他の振動条件、圧力比においても R/h の変化による傾向は変わらず、 R/h の増加に伴い、不安定となる円周方向波数 n が増加するだけで、 ϕ 、 ψ の挙動はほぼ同一となる。

Fig.3~6 に示すように、加振振幅 b_0 の変化に対して Mathieu 係数 ϕ の値は変化しない。これは、Mathieu 係数 ϕ の式(14)中には加振振幅 b_0 の項が存在しないためである。一方、 ψ の式(15)~(17)には加振振幅 b_0 の項が存在しており、他の条件が一定で、加振振幅 b_0 のみを増加させると、横軸の ψ は変化しないで、縦軸の ϕ の値のみ増加する。

また、積層角 θ の影響であるが、Fig.3~6 に示されるように、

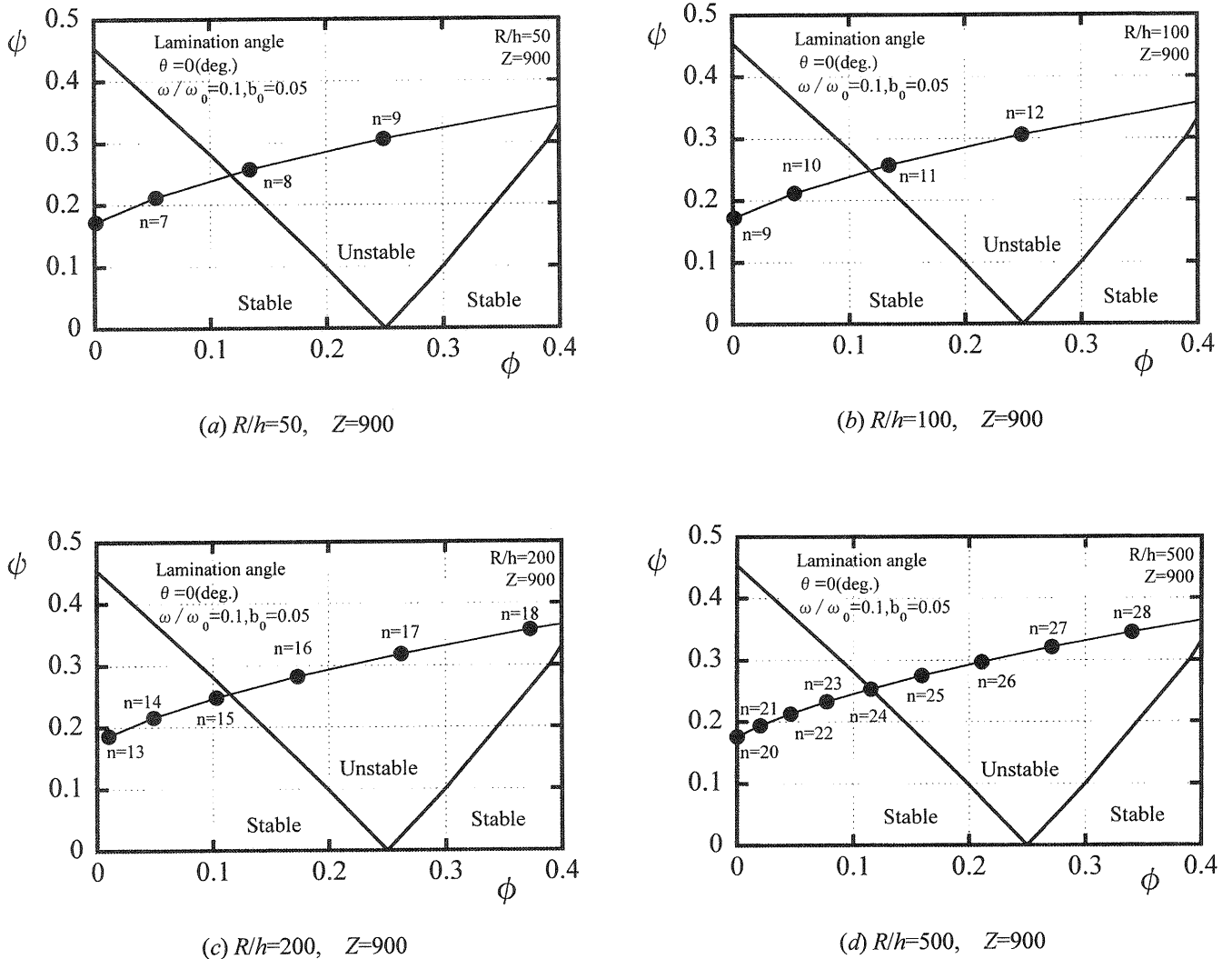
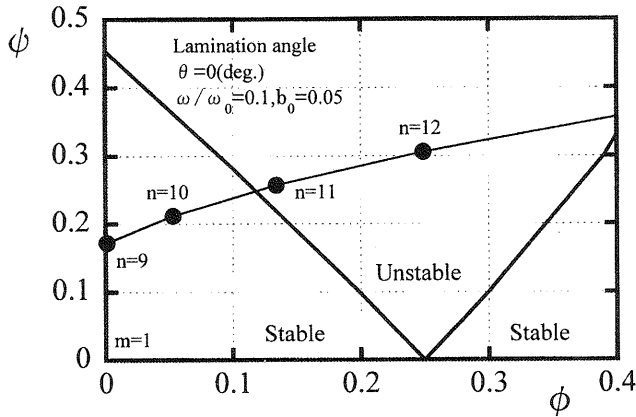
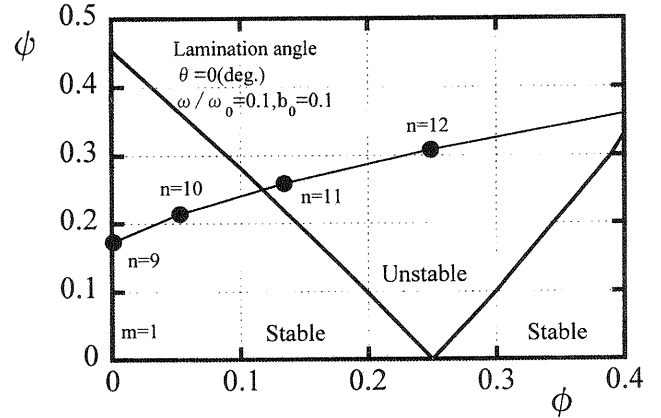


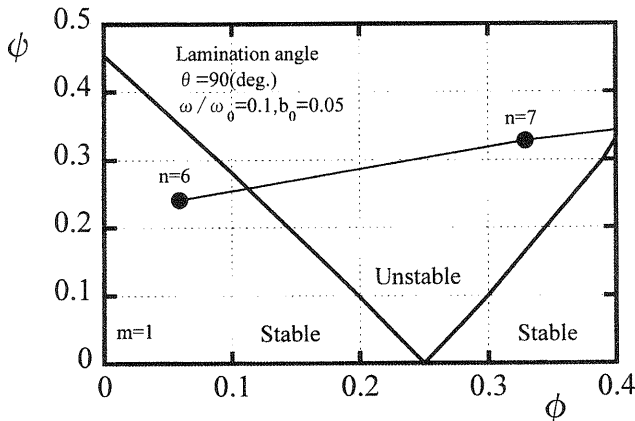
Fig.2 The relation between ψ and ϕ for unidirectional laminated cylindrical shells subjected to periodic hydrostatic pressure at $Z=900$, $p_0/p_s=5.0$, $\omega/\omega_0=0.1$, $b_0=0.05$, lamination angle $\theta=0(\text{deg.})$.



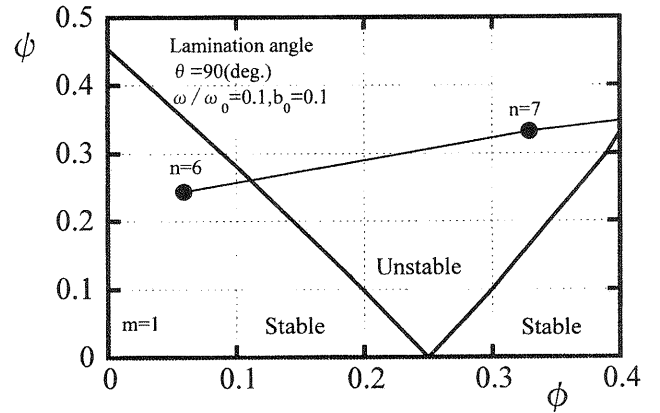
(a) lamination angle $\theta=0(\text{deg.})$.



(a) lamination angle $\theta=0(\text{deg.})$.



(b) lamination angle $\theta=90(\text{deg.})$.



(b) lamination angle $\theta=90(\text{deg.})$.

Fig.3 The relation between ψ and ϕ for unidirectional laminated cylindrical shells subjected to periodic hydrostatic pressure at $R/h=100, Z=900, p_0/p_s=5.0, \omega/\omega_0=0.1, b_0=0.05$

Fig.4 The relation between ψ and ϕ for unidirectional laminated cylindrical shells subjected to periodic hydrostatic pressure at $R/h=100, Z=900, p_0/p_s=5.0, \omega/\omega_0=0.1, b_0=0.1$

積層角 θ の影響としては、円周方向波数 n は $\theta=90(\text{deg.})$ の方が $\theta=0(\text{deg.})$ より低値となっている。つまり、積層角 θ が $90(\text{deg.})$ の方へ繊維配向していけば、円周方向の剛性が高くなるため、不安定となる円周方向波数 n は低値となる。また、既報³⁾において、静的静水座屈圧力を Donnell 殻理論により算出し、Mathieu の動的安定性を示している。その解析結果と比較すると不安定となる動的不安定モード n は一致していることから、一方向繊維強化積層円筒殻においては、静的静水座屈圧力を算出する殻理論の違いが Mathieu 係数 ϕ, ψ へ与える影響は非常に小さいことが言える。

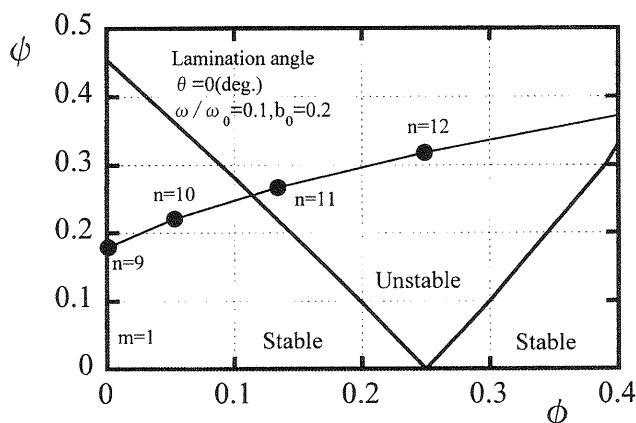
4. 結 言

本論文は周期的静水圧力を受ける一方向繊維強化積層円筒殻の動的安定性について、平衡方程式で板厚方向の慣性力のみを

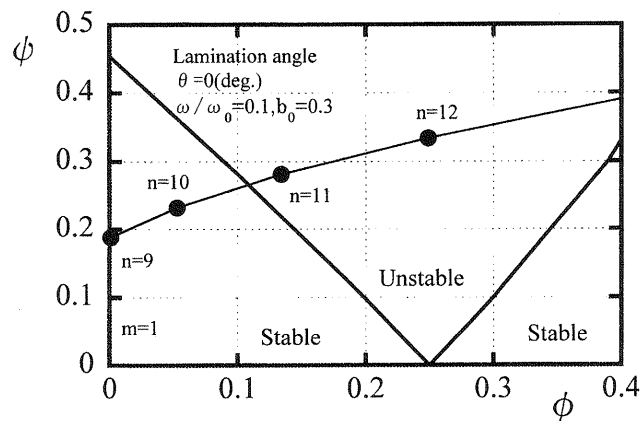
考慮し、基礎方程式に Galerkin 法を適用することで、Mathieu 型方程式を導き、Mathieu の無次元係数 ϕ, ψ を示すことができた。

本論文で示した周期的静水圧力を受ける一方向繊維強化積層円筒殻の動的安定性においては、周期的静水圧力の基準となる静的静水座屈値を算出する殻理論の違い、つまり Flügge 殻理論を適用した静的静水座屈値と Donnell 殻理論を適用した静的静水座屈値による Mathieu 係数へ与える影響を比較した結果、差異は極めて小さく、動的不安定となる円周方向波数 n は同値と見なして問題ないことが理論的に検証できた。

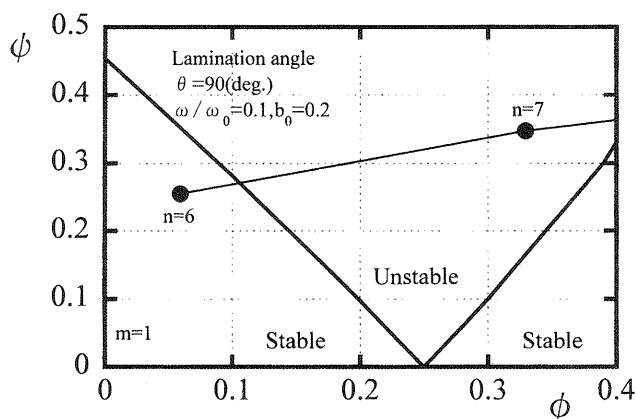
本論文は、板厚方向に均質な直交異方性の一方向繊維強化積層円筒殻についての解析であるので、静的静水座屈特性⁸⁾を考慮し、二方向積層（例えば、アングルプライ積層およびクロスプライ積層）あるいは、カップリング項を含む積層構成からなる積層円筒殻について検討することが今後の課題である。



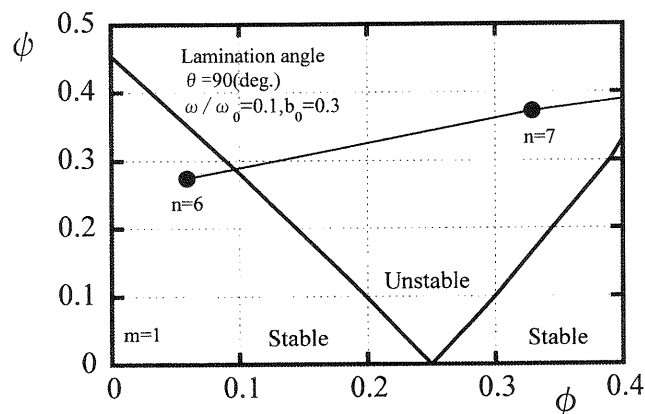
(a) lamination angle $\theta=0(\text{deg.})$.



(a) lamination angle $\theta=0(\text{deg.})$.



(b) lamination angle $\theta=90(\text{deg.})$.



(b) lamination angle $\theta=90(\text{deg.})$.

Fig.5 The relation between ψ and ϕ for unidirectional laminated cylindrical shells subjected to periodic hydrostatic pressure at $R/h=100, Z=900, p_0/p_s=5.0, \omega/\omega_0=0.1, b_0=0.2$.

Fig.6 The relation between ψ and ϕ for unidirectional laminated cylindrical shells subjected to periodic hydrostatic pressure at $R/h=100, Z=900, p_0/p_s=5.0, \omega/\omega_0=0.1, b_0=0.3$.

参考文献

- 1) J.C.Yao : Dynamic Stability of Cylindrical Shells under Static and Periodic Axial and Radial Loads, AIAA J., Vol.1, No.6(1963),1393.
- 2) 粕谷平和, 根本圭一 : 周期的軸圧縮荷重を受ける積層円筒殻の動的応答, 日本複合材料学会誌, Vol.19, No.5(1993),189.
- 3) 根本圭一, 粕谷平和 : 周期的静水圧力を受けるアングルブライ積層円筒殻の動的安定性, 日本複合材料学会誌, Vol.25, No.2 (1999), 63.
- 4) 根本圭一, 粕谷平和 : 周期的静水圧力を受けるクロスプライ積層円筒殻の動的安定性, 日本航空宇宙学会論文集, Vol.48, No.533 (2000), 34.
- 5) 根本圭一, 粕谷平和, 山岸保司 : 周期的外圧力を受ける複合材料積層円筒殻の動的安定解析, 日本機械学会論文集 (A編), Vol.69, No.679(2003),545.
- 6) W.Flügge : Stresses in Shells, Springer-Verlag(1962).
- 7) R.M.Jones : "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hills (1975).
- 8) 山岸保司, 佐藤孝行, 粕谷平和 : 複合材料積層円筒殻の静水圧座屈に及ぼす積層構成効果, 東海大学紀要工学部, Vol.41, No.2 (2001), 129.
- 9) 粕谷平和 : 積層複合円筒殻の振動特性, 東海大学紀要工学部, Vol.27, No.2 (1988), 69.
- 10) 植村益次, 山田直樹 : 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24, No.257 (1975),156.
- 11) 林 毅 : 軽構造の理論とその応用 (上), 日科技連, 1966.