

マーカー粒子 FEM を用いた Bingham 塑性流れ解析

田中修^{*1}・島崎洋治^{*2}

Calculation of time-dependent Bingham plastic flow using marker FEM

by

Osamu TANAKA and Yoji SHIMAZAKI

(Received on Sep. 28, accepted on Nov. 21, 2001)

Abstract

A simple marker FEM solution algorithm is introduced to calculate transient Bingham plastic flows. An axisymmetric pure radial flow problem and a simple problem of mass conservation are first solved for the purpose of checking the FEM algorithm. A slumping flow of cement-paste caused by its own weight is then calculated as an example of the transient Bingham plastic flow.

Keywords: Marker Particle, Bingham Plastic Fluid, Cement-Paste, Finite Element Method

1. はじめに

自由表面をもつ時間依存流れの数値解析には種々の有限要素法が用いられている。流体領域を有限要素網で表現し、有限要素中の節点の位置を計算された速度に応じて移動させる方法はラグランジェ法と呼ばれる¹⁾²⁾。この方法は、有限要素網を流体領域と考えているので、自由表面を直接的に捉えることができる反面、要素の変形が著しいと計算が破綻してしまう。そのため、流体領域の要素網への再分割を定期的に行うリゾーニングと呼ばれる作業が必要となる。一方、空間に固定された要素網上で流体を移動させる方法はオイラー法と呼ばれ、PC 関数法 (method of pseudo-concentration function) ,VOF 法 (volume of fluid method) , マーカー粒子法などが挙げられる。

VOF 法は流体のあるなしを示す関数を解く方法で、自由表面を追跡するための簡単な方法の一つである。Thompson³⁾⁴⁾は有限要素法をこれに適用し、工業成形の過程や地盤のゆっくりとした変形の過程を解析した。この方法では、流れの速度を求め、次にこの速度によって移流する密度関数を有限要素法で解析して自由表面位置の決定をする。しかしながら、密度関数の解析にガラキン法を用いているために、自由表面形状が不安定になりこれを平滑化する手法を必要とする。

流体の自由表面形状ならびに流体内部の運動を把握する方法にマーカー粒子を使った方法がある⁵⁾⁶⁾。これは流体を複数のマーカー粒子で表現し、解析で求まる節点流速に応じてマーカー粒子を移動させ、自由表面位置の決定や流動形状を可視化する方法である。Shimazaki⁷⁾は、非正常クリープ流体の流れ運動を表現することを目的として3角形面積座標を使った解析法を提案した。しかしながら、この方法ではマーカー粒子を手際よく動かすために、要素やマーカー粒子の配置に特別な配慮を必要とする。

本研究ではマーカー粒子がある時刻に属している要素からそ

れを取り囲むいずれかの要素に移動するための簡単な方法として Toda 他⁷⁾が提案したベクトルの外積を利用してマーカー粒子の位置を決定する方法を用いた。この方法は、3角形面積座標を使った方法のように、基準座標を考慮する必要がないためプログラムが簡潔になる。

本研究ではまず、ベクトルの外積を用いたマーカー粒子法のアルゴリズムの有効性を確認するために、初期条件として境界に流速を与え、流体が放射状に移動したときの位置を把握する問題の解析を行う。この問題では理論解が軸対称系での連続の式を解くことにより簡単に求められるので、この理論解と数値解を比較し解の精度について検討する。次に流体が自重で放射状に移動する問題の解析を行う。この解析では理論解を求めることが出来ないため、簡易的ではあるが初期時刻の体積がある時刻で保存されているかを確認する。最後にピングム塑性流れの例題として、自重によってスランプ流れするセメントペーストについて解析を行う。

2. 支配方程式

非正常非圧縮の Bingham 塑性流体の運動は、デカルト座標系に対し以下に示すように表される。

運動方程式：

$$\tilde{n}u_{i,t} + \tilde{n}u_j u_{i,j} = \sigma_{ji,j} + b_i \quad (1)$$

連続の式 (非圧縮性) :

$$u_{i,i} = \hat{a}_{ii} = 0 \quad (2)$$

構成方程式：

$$\hat{a}_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2 \quad (3)$$

*1 工学研究科土木工学専攻博士課程前期

*2 工学部土木工学科教授

$$\hat{\sigma}_{ij} = -p\hat{a}_{ij} + \hat{\sigma}'_{ij} \quad (4)$$

$$\hat{\sigma}'_{ij} = 2\hat{\alpha}\hat{a}_{ij} \quad (5)$$

ここで、

$$\hat{\alpha} = \begin{cases} \zeta_r & |\hat{a}| < \hat{a}_c \\ \zeta_{pl} + \frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{a}} & |\hat{a}| \geq \hat{a}_c \end{cases}$$

$$\hat{a} = \sqrt{(\hat{a}_{ij} \cdot \hat{a}_{ij})}$$

境界条件：

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{on} \quad S_1 \quad (6)$$

$$\hat{i}_j \hat{\sigma}_{ij} = \bar{T} \quad \text{on} \quad S_2 \quad (7)$$

ここに \bar{n} は密度, u は速度, b_i は物体力, \hat{a} はひずみ速度, $\hat{\sigma}$ は応力, $\hat{\sigma}'$ は偏差応力, \hat{i} は粘性係数, $\hat{\sigma}_y$ は降伏応力, \hat{a}_c は臨界速度勾配, ζ_r は降伏値内の粘性, ζ_{pl} は可塑粘性である. 式(6) (7)はそれぞれ第 1 種および第 2 種境界条件を示す. \hat{i}_j は外向き単位法線ベクトルの方向余弦, () は既知量を表す.

3. 有限要素法

3.1 速度の計算

式(1)の解を求めるために, ガラーキン法による有限要素法を用いる(低 Re 数の流れを対象としているため安定化手法は用いない). この方法は参考文献⁽⁶⁾⁽⁸⁾に詳述されているので, ここでは簡単に述べることにする.

速度および圧力に対する補間関数をそれぞれ次のように定義する.

$$u_i \approx N_k u_{ki}, \quad p \approx M_m p_m \quad (8a,8b)$$

ここに, u_{ki} , p_m はそれぞれ速度, 圧力の節点値, N_k は 2 次, M_m は 1 次の形状関数である. 式(1)の運動方程式の解を求めるためにガラーキン法を適用し, 式(7)の境界条件を考慮すれば, 式(8)の N_k , M_m を重みとして次式をえることができる.

$$\begin{aligned} & \hat{n} \int_V N u_{i,i} dV + \hat{n} \int_V N u_i u_{i,j} dV + \hat{n} \int_V N u_j u_{i,j} dV \\ & + \int_V N_j \hat{\sigma}_{ij} dV = \int_S N T_i dS + \int_V N b_i dV \end{aligned} \quad (9)$$

次にペナルティ法により非常に小さい数 $\hat{\epsilon}$ (例えば 10^{-12}) を使って, 式(2)を次のように書き換える.

$$\frac{1}{\hat{\epsilon}} \int_V M u_{i,i} dV + \int_V M p dV = 0 \quad (10)$$

式(10)の p を式(9)に代入してマトリックス表示すると次のようになる.

$$[C]\{u_i\} + [K]\{u\} = \{F\} \quad (11)$$

ここで, $[C]$ と $[K]$ はそれぞれ式(9)の第 1 および第 2 項から求め, $\{F\}$ は右辺の項からもとまるマトリックスである.

これらを整理すると, 次のような解くべき方程式を得ることができる.

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{\Delta t} [C] + \hat{\epsilon} [K] \right] \{u\}^{t+\Delta t} \\ & = \{F\}_{\text{avg}} + \left[\frac{1}{\Delta t} [C] - (1-\hat{\epsilon}) [K] \right] \{u\}^t \end{aligned} \quad (12)$$

$$\{F\}_{\text{avg}} = \left\{ (1-\hat{\epsilon}) \{F\}^t + \hat{\epsilon} \{F\}^{t+\Delta t} \right\} \quad (13)$$

ここに Δt は時間間隔, $\hat{\epsilon}$ は 0 から 1 までの値で, $\hat{\epsilon} = 0$ ならば陽解法, $\hat{\epsilon} = 0.5$ ならばクランク・ニコルソン法, $\hat{\epsilon} = 1$ ならば完全陰解法となる. 本研究では $\hat{\epsilon} = 0.5$ として解析を行った.

3.2 ベクトルの外積を用いたマーカー粒子法

マーカー粒子 FEM は流体を複数のマーカー粒子で表現し, 解析で求まる節点流速に応じてマーカー粒子を移動させ, 自由表面位置の決定や流動形状を可視化する方法である.

マーカー粒子を用いて流動現象を可視化するために, 初期情報としてマーカー粒子の座標およびマーカー粒子が属する要素の情報が必要となる. これらの初期情報(時刻 $t=0.0$ における)は, 有限要素を生成する際に求めておく. そして, 流速の計算を行なった後, 時刻 $t+\Delta t$ におけるマーカー粒子がどの要素に移動したかを特定しなければならない.

Shimazaki⁽⁵⁾が提案した, 従来のマーカー粒子 FEM では 3 角形面積座標を用いて, マーカー粒子の要素間での移動を特定している. この方法では, マーカー粒子の移動を特定できる要素が, マーカー粒子の属する要素と, その辺で接する 3 つの計 4 要素に限られていた. このため, マーカー粒子の飛び越れを防ぐため, マーカー粒子の配置や有限要素の生成の際に特別な配慮が必要となる. また, マーカー粒子の移動を特定する際にも \hat{i} , ζ , α といった基準座標を考慮しなければならないためアルゴリズムが複雑になる.

Toda 他⁽⁷⁾はマーカー粒子の移動した要素を特定するためにベクトルの外積を用いたマーカー粒子 FEM を提案している. ここではその方法について簡単に説明する. Fig.1 はある解析領域における有限要素分割の一例である. Fig.2 の要素網は使用した 3 角形 6 節点の 2 次要素で構成されており, Fig.1 内の任意の要素 I とそれを取り囲む 12 個の要素を示している. 時刻 t にマーカー粒子が要素 I に存在したとすると, 時刻 $t+\Delta t$ におけるマーカー粒子の移動範囲は, 任意の要素 I とそれを取り囲む 12 要素の計 13 要素のいずれかになる. そのマーカー粒子の移動を特定するために, Fig.3, Fig.4 に示す基準ベクトルを導入する. Fig.3 は 3 角形要素を構成する 3 辺に沿って定義する基準ベクトル $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ を示している. Fig.4 は 3 角形要素の 3 つの頂点と時刻 $t+\Delta t$ におけるマーカー粒子の位置を結ぶ基準ベクトル $(\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}')$ を示している. 基準ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ と $\vec{a}', \vec{b}', \vec{c}'$ のそれぞれについて外積計算を行い, その正負の組み合わせによりマーカー粒子の移動した要素を特定する. ここでは, $\vec{a} \times \vec{a}'$ がマイナス, $\vec{b} \times \vec{b}'$, $\vec{c} \times \vec{c}'$ がプラスの符号を有することになり, この正負の符号の組み合わせによりマーカー粒子は要素 I の右側に移動したことがわかる.

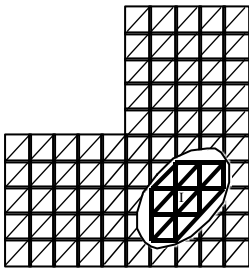


Fig.1 Example of Finite Element mesh.

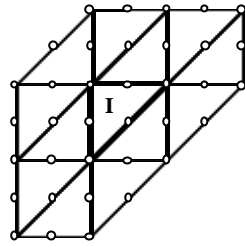


Fig.2 Element "I" Surrounded by Twelve Elements.

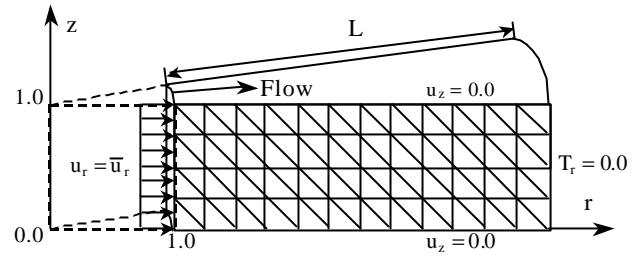


Fig.5 FE Mesh for Pure Radial Flow problem.

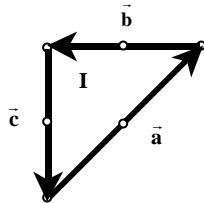


Fig.3 BasisVector

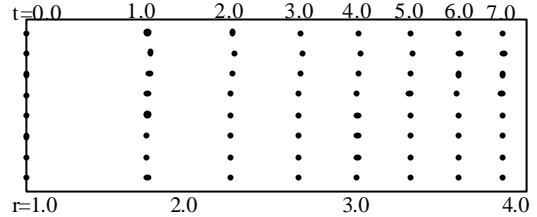


Fig.6 Position of Markers at Each Time Step.

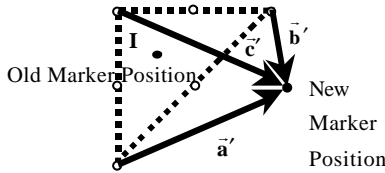


Fig.4 BasisVector

Table 1 Comparison of Exact and Calculated Position.

Time (t)	Exact Position (r)	Calculated Position(r)		
		$\dot{A}t=0.1$	$\dot{A}t=0.05$	$\dot{A}t=0.01$
1.0	1.7321	1.7554	1.7414	1.7310
2.0	2.2361	2.2516	2.2458	2.2361
3.0	2.6458	2.6673	2.6565	2.6458
4.0	3.0000	3.0427	3.0078	2.9999
5.0	3.3166	3.3596	3.3225	3.3166
6.0	3.6056	3.6463	3.6104	3.6050
7.0	3.8730	3.9228	3.8779	3.8725
Error ($\times 10^{-3}$)		11.9918	2.6475	0.1672

4. 数値解析例

上に説明したベクトルの外積を用いたマーカー粒子 FEM を用いて Toda 他は斜面流動問題や射出成形問題などでアルゴリズムの有効性を定性的に示している。

ここでは先ず、理論解がわかっている流れ問題の数値解と理論解を比較し、次に流体の体積保存を確認する問題の数値解析を行い、アルゴリズムの有効性を定量的に示す。

4.1 境界で与えた流速により流動する放射流問題

最初に行う数値解析例では初期条件として境界に流速を与えた問題を解析する。Fig.5 にこの問題の解析領域を示す。解析領域は 96 要素, 225 節点の均一な要素網で構成されており、固体壁面の境界条件は上下ともに slip 条件とし、 $r=L$ の境界ではトラクションはなしとする。マーカー粒子は $r=1.0$ の位置に 8 個配置した。物質を含む領域では $\bar{n}=1$, $\bar{i}=1$ とした。Fig.6 に数値解析より求めた各時刻におけるマーカー粒子位置の一例を示す。ここで t の単位は $[L/U]$ である。

この問題における理論解は軸対称での連続の式(2)を解くことにより求められる。 r 方向のみ流速が存在するとすれば、式(1)は、

$$u_{r,r} + u_r/r = 0 \tag{14}$$

である。境界条件 ($u_r = \bar{u}_r$ at $r=1$) より、式(14)は、

$$u_r = \bar{u}_r/r \tag{15}$$

となり、流体の位置 r を時間 t で表すと式(10)は、

$$r = \sqrt{2\bar{u}_r t + 1} \tag{16}$$

となる。Table 1 は $u_r = 1.0$, $\dot{A}x = 0.25$, $\dot{A}t = 0.1, 0.05, 0.01$ としたときの式(16)より求めた理論解と数値解析より求めたマーカー粒子の位置の時刻歴および誤差を示している。Table 1 における誤差は以下に示す式より求めている。

$$\text{Error} = \sqrt{\sum_{i=1}^7 (r_i^c - r_i^t)^2} / \sqrt{\sum_{i=1}^7 (r_i^t)^2} \tag{17}$$

ここで、式(17)における c と t は解析値と理論値を示す。この表よりある程度 $\dot{A}t$ を小さくすることによって、この放射流問題のような簡単な問題において、ベクトルの外積を用いたマーカー粒子 FEM が理論値に十分に近い値を得られることがわかる。

4.2 流体の自重で流動する放射流問題

次に自重で流動する放射流問題の数値解析を行う。この問題では流速に対する理論解を簡単に求めることはできない。そこで、初期時刻の流体の体積が、ある時刻経過後に保存されているかを確認する。ここでは初期時刻に $r=0.5, z=1.0$ 内 (Fig.7 の影で示す領域) に流体が満たされており、ある時刻経過すると $r=1.0, z=0.25$ 内に流体が満たされる。Fig.7 はこの問題の解析領域を示している。解析領域は 128 要素, 289 節点の均一な要

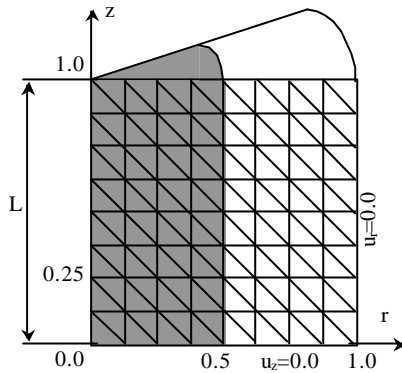


Fig.7 FE Mesh for Mass Conservation Problem.

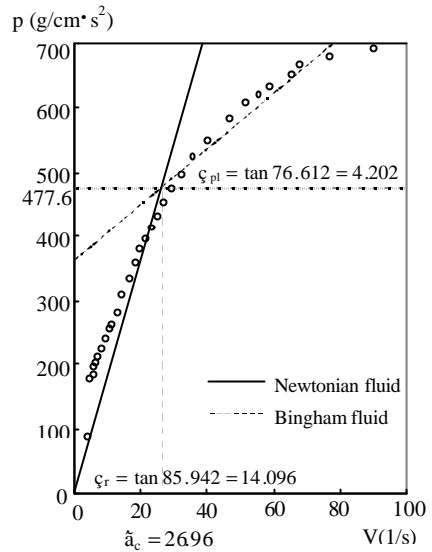


Fig.9 Biviscosity Model of Cement-Paste

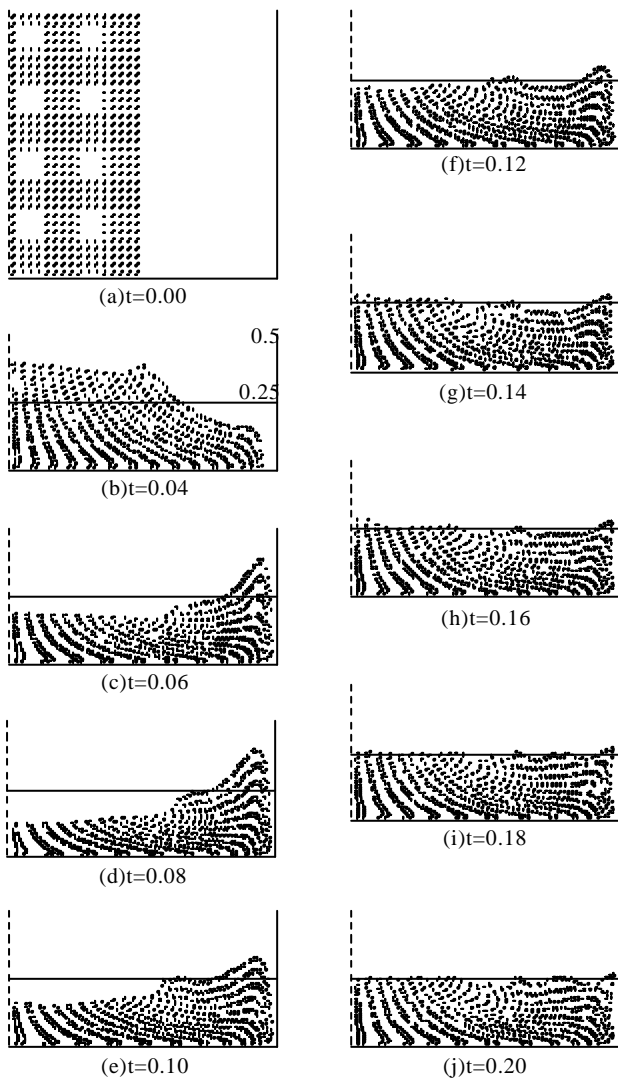


Fig.8 Profiles of the Fluid during Mass Conservation Problem.

素網で構成されており、固体壁面の境界条件は slip 条件とする。物質領域では $\tilde{n} = 1$, $\tilde{i} = 1$ とし、マーカー粒子を領域内に 1024 個配する。初期時刻のマーカー粒子の配置を Fig.8(a)に示す。Fig.8 にマーカー粒子の分布の時刻歴を示す。ここで t の単位は $[L/U]$ である。この図から $t=0.20$ で初期時刻の体積をほぼ満足する結果を得たことがわかる。

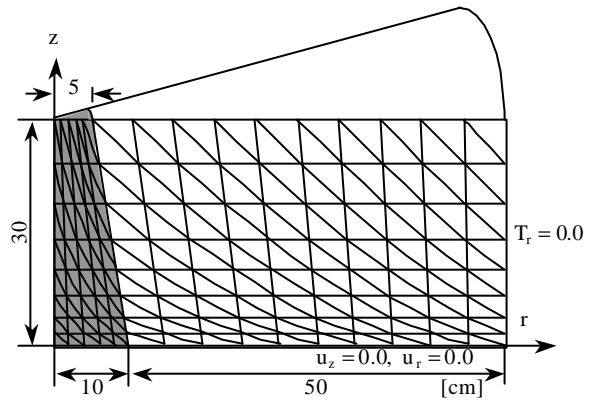


Fig.10 FE Mesh for Slump Test.

5 . Bingham 塑性流体のスランプ試験問題

物質が流動する現象を解明することは工学上重要な課題である。例えば、斜面崩壊による地すべりは自然災害をもたらす。また、フレッシュコンクリートなどの流動する建設材料については、その流動特性を把握していないと施工時に支障をきたす。今日、フレッシュコンクリートの施工性能を合理的に評価するために、レオロジーの立場から論じた研究が数多く報告されるようになってきている^{9),10)}。しかし、既往の研究では、フレッシュコンクリートを各種粘度計を用いてそのレオロジー定数を測定し把握することに重点を置いていることが多く、流動解析に関する研究は比較的少ない^{11),12)}。

本研究ではフレッシュコンクリートの流動に大きな影響を与えるセメントペーストに注目し、これを Bingham 塑性体と仮定し、スランプ試験に相当する流動問題をマーカー粒子 FEM により解析する。

本来の理想的な Bingham 塑性体は静止状態で、偏差応力が 0 でないような応力を支えることができる。つまり、せん断応力 δ の絶対値が降伏応力 δ_y よりも小さいとき、その物質は剛体であ

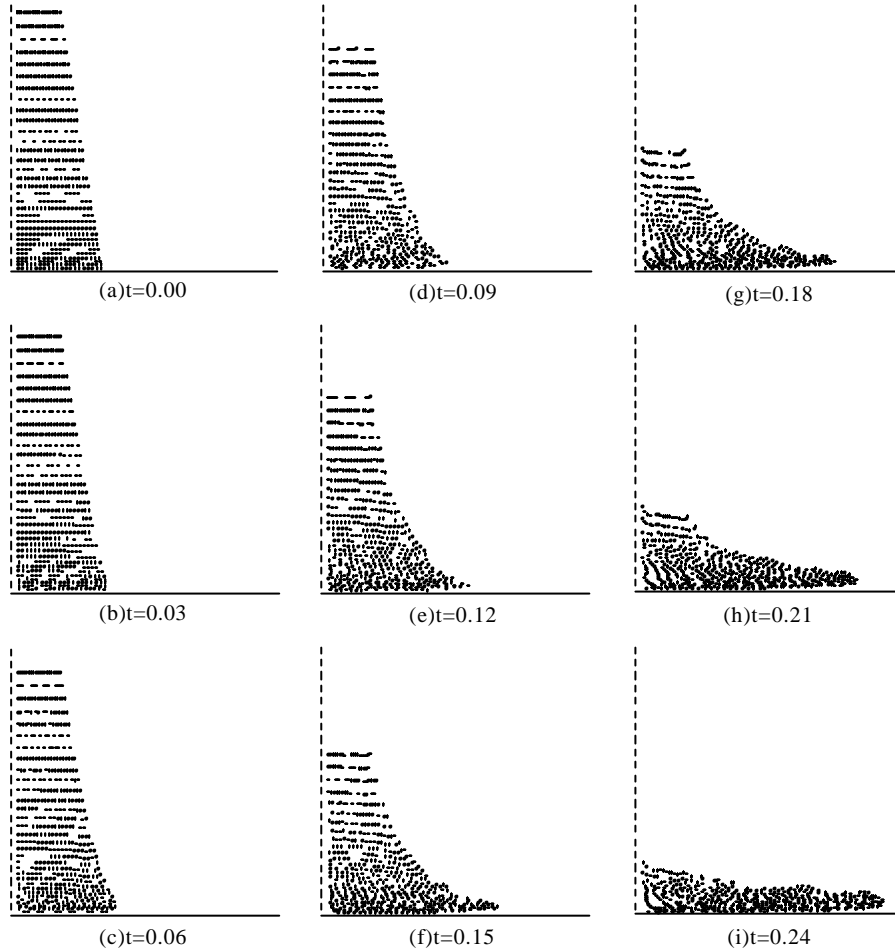


Fig.11 Profiles of the Fluid during Slump Test.

り、したがってひずみ速度 $\dot{\alpha} = 0$ である。しかし、 $|\dot{\alpha}|$ が $\dot{\alpha}_y$ より大きくなると、 $\dot{\alpha}$ と同じ符号を持ち、絶対値が $|\dot{\alpha}| - \dot{\alpha}_y$ に比例する $\dot{\alpha}$ でその物資は流れる。このような物質は一般に Bingham 塑性体と呼ばれる。

本研究では Fig.9 に示されるようなセメントペーストの流動特性を表現した実験結果よりモデルを作成した。この図は管式粘度計を使用して計測した、水セメント比 45% のセメントペーストの流動をプロットしたものである¹³⁾。図中の実線はビンガム流動していないときにプロットされた点から、破線はビンガム流動しているときにプロットされた点から最小二乗法で求めたものである。2つの直線の傾きはそれぞれ異なる粘性係数となり、これらの交点の座標 V を臨界速度勾配 $\dot{\alpha}_c$ とする。有限要素法で計算する場合、 $\dot{\alpha}_c > V$ のときの粘性係数は ζ_r 、 $\dot{\alpha}_c \leq V$ のときの粘性係数は ζ_{pl} を用いる。

Fig.10 は 527 節点、240 個の要素で構成された解析領域を示している。要素網は底面方向で密になるように構成した。この結果、自動生成するマーカー粒子の位置も底面にいくほど密な配置となっている。底面の境界条件は non-slip 条件とし、 $r=60$ の境界ではトラクションはなしとする。解析にはセメントペーストの密度として 1.9g/cm^3 を与える。領域内には流動体として 640 個のマーカー粒子を図の影で示す領域に配置し、初期時刻のマーカー粒子の配置は Fig.11(a) に示す。Fig.11 にマーカー粒子の分布の時刻歴を示す。ここに t の単位は [sec] である。

6. おわりに

本研究ではベクトルの外積を用いたマーカー粒子 FEM のアルゴリズムの有効性を確認する 2 つの問題を数値解析し、最後に Bingham 塑性流体の流動問題を数値解析した。

最初に行った数値解析では、ベクトルの外積を用いたマーカー粒子 FEM の数値解の精度を検討するために理論解が求まる問題を解析し、理論解とほぼ一致する解を得ることができた。次に行った自重で流動する問題の数値解析では、流速に対する理論解を求めることができないため、初期時刻の流体の体積がある時刻経過後に保存されているかを確認した。

Bingham 塑性流体と仮定したセメントペーストのスランプ試験に相当する問題では、実際のスランプ試験の複雑な境界条件は考慮していないものの、定性的ではあるが流動形状をよく可視化することができた。

今後は流体の表面張力や境界摩擦を考慮した解析法を開発することが求められる。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O. C., Godbole, P. N. : Penalty Function Approach to Problems of Plastic Flow of Material with Large Deformations, J. Strain Anal., 10, pp. 180-183, 1975.
- 2) Zienkiewicz, O. C. : The Finite Element Method, 3rd ed. McGraw-Hill, New York, 1977.

- 3) Thompson, E. : Use of Pseudo-concentrations to Follow Creeping Viscous Flows During Transient Analysis, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 6, pp. 749-761, 1986.
- 4) Hovanotayan, S., Shimazaki, Y. : Pseudo-Concentration Scheme for Transient Creeping Flows with Taylor-Galerkin Finite Element Method, CFDJ, Vol. 7, No. 4, pp. 425-434, 1999.
- 5) Shimazaki, Y. : Visualization of Flows by FEM Using Six-Node Triangular Element, Int. J. Numer. Methods Fluids, Vol. 21, pp. 973-979, 1995.
- 6) 島崎洋治 他 「数値流体力学シリーズ 4 移動境界流れ解析」 財団法人東京大学出版会 1995.
- 7) Toda, T., Hovanotayan, S. and Shimazaki, Y. : Visualization of Unsteady Creeping Viscous Flows Using Vector Products, IJCFD, Vol. 12, pp. 257-267, 1999.
- 8) 川原睦人 他 「数値流体力学シリーズ 1 非圧縮性流体解析」 財団法人東京大学出版会 1995.
- 9) 岩崎訓明：ワーカピリチー判定法，コンクリート工学，Vol. 21，No. 10，pp. 4-12，1983.
- 10) 村田二郎，菊川浩治：まだ固まらないコンクリートのレオロジー定数測定法に関する一考察，土木工学論文報告集，第 284 号，pp. 117-126，1979.
- 11) 平田淳，室賀陽一郎，大須賀哲夫，村井邦雄：高流動コンクリートの流動解析 ハイブリッドポンツーン打設への適用，石川島播磨技報，Vol. 38，No. 6，pp.412-415，1998.
- 12) 森博嗣，谷川恭雄：フレッシュコンクリートの流動解析技術の現状，コンクリート工学，Vol. 32，No. 12，pp. 30-40，1994.
- 13) 岡本篤樹，笠井哲郎，島崎洋治：管式粘度計を通過するセメントペーストの流動解析，東海大学紀要，Vol. 38，No. 1，1998.