

初期不整を考慮したアングルプライ積層板の 二軸圧縮負荷による二次座屈解析

根本圭一*1・辻本真之*2・粕谷平和*3

Secondary Buckling Analysis of Angle-Ply Laminated Plates with Initial Imperfections under Biaxial Compressive Loads

by

Keiichi NEMOTO , Masayuki TSUJIMOTO and Hirakazu KASUYA

(Received on March 31, 2008, accepted on June 5, 2008)

Abstract

Advanced fiber-reinforced laminated plates have been used for structural members in various fields, by virtue of their high specific strength and stiffness. This paper considers, by use of the second variation of the total potential energy, secondary buckling of angle-ply laminated plates with initial deflection under biaxial compression that is simply supported along four edges. The occurrence of secondary buckling is proven analytically, and the effects of various factors, such as initial imperfection, lamination angle, biaxial compressive load ratio, and postbuckling deflection pattern, are discussed.

Keywords: *Structural Analysis, Composite Materials, CFRP, Secondary Buckling, Angle-Ply Laminated Plates, Biaxial Compression, Initial Imperfection*

1. 緒 言

構造物の軽量化にともない、比強度、比剛性の優れた繊維強化プラスチック材、特に炭素繊維からなる高性能繊維強化プラスチック材は、薄肉軽量構造として、航空宇宙をはじめとする各分野で数多く使用されている。このように、構造物が薄肉軽量化される場合には、座屈が設計基準として用いられるため、その挙動を解明することは非常に重要であると考えられる¹⁾。

特に面内圧縮負荷を受ける薄板は座屈後も荷重低下がなく耐荷能力があるため、一次座屈後も使用可能である^{2),3)}。しかし、一次座屈後さらに荷重を加えても、いつまでも安定状態が続くわけではなく、ある荷重において不安定となり、耐荷剛性がさらに低下する二次座屈現象が起こる⁴⁾。

著者らは面内圧縮負荷を受けるアングルプライ積層板の二次

座屈解析^{5),6)}ならびに初期不整を有するアングルプライ積層板の座屈後の挙動解析手法⁷⁾について提案してきた。しかしながら、初期不整を有するアングルプライ積層板に二軸圧縮負荷を受けた時の一次座屈後の安定状態について検討された論文は著者の知る限り見当たらない。

本論文においては、前報^{5)~7)}の解析手法を拡張させ、周辺単純支持され、初期たわみを考慮した場合について、二軸圧縮負荷を受けるアングルプライ積層板を例に取り、全ポテンシャルエネルギーの第二変分値により一次座屈後の平衡状態の安定判別を行う方法を用いて明らかにする。また、二次座屈現象に与える諸因子の影響を解析的手法により明らかにする。

2. 座 屈 解 析 法

2. 1 異方性積層板の基礎式

図1に示すような板幅 a , 板厚 h のアングルプライ積層板が面内圧縮荷重 \bar{N}_x , \bar{N}_y を受ける場合を考え、中央面の変位を u , v , w とする。ここで w_0 を初期たわみと仮定すると、面内ひずみ

*1 : 横浜ゴム株式会社 航空部品技術部

*2 : 工学研究科機械工学専攻修士課程

*3 : 工学部動力機械工学科・教授

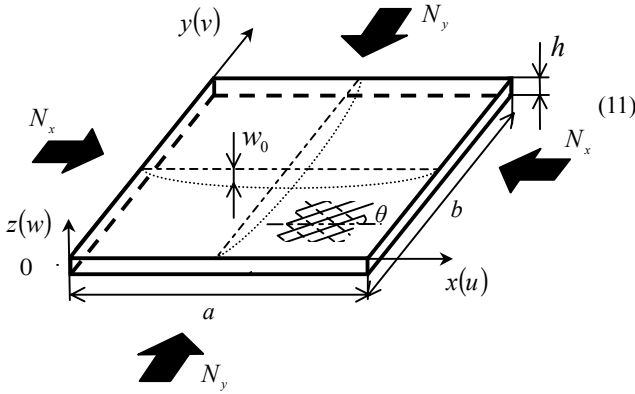


Fig.1 Configuration and coordinates of angle-ply laminated plates with initial imperfections biaxial compressive loads.

ε_x , ε_y , γ_{xy} , 曲率成分 κ_x , κ_y , κ_{xy} と変位 u , v , w との関係は座屈後の安定問題を解析するために、二次の微小項を考慮した有限変形理論を用いると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (1)$$

また、面内ひずみ成分と平面応力成分 σ_x , σ_y , τ_{xy}

との関係は、弾性域内に限定すると次式のように表される。

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\nu_y \sigma_y}{E_y}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\nu_x \sigma_x}{E_x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G_{xy}} \quad (3)$$

ここで、 E_x , E_y は縦弾性係数、 G_{xy} はせん断弾性係数、 ν_x , ν_y はポアソン比である。板厚 h の単位幅当りの面内力 N_x , N_y , N_{xy} は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz = \frac{E_x h}{1 - \nu_x \nu_y} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu_y \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right\} \right] \\ N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz = \frac{E_y h}{1 - \nu_x \nu_y} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu_x \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right\} \right] \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz = G_{xy} h \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \right\} (4)$$

また、本論文で取り扱う板厚方向に均質なるアングラプライ積層の合応力成分と面内ひずみ成分、合モーメント成分と曲率成分の関係式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} (5)$$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性マトリックス、 D_{ij} は曲げ剛性マトリックスであり、それぞれ、異方性材の繊維方向、繊維に直角方向の縦弾性係数 E_L , E_T , ポアソン比 ν_L , ν_T , せん断弾性係数 G_{LT} および積層角 θ が与えられると求められる⁸⁾。

x 軸および y 軸方向に圧縮荷を受ける積層板の面内変形エネルギー、曲げエネルギーをそれぞれ U_m , U_b とすると

$$U_m = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \quad (6)$$

$$U_b = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \quad (7)$$

であり、変位により圧縮荷を受ける場合の全ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = U_m + U_b \quad (8)$$

である。式(8)に式(3), (5), (6)および(7)を代入すると、

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{h} \left\{ \frac{N_x^2}{E_x} - \left(\frac{\nu_x}{E_x} + \frac{\nu_y}{E_y} \right) N_x N_y + \frac{N_y^2}{E_y} + \frac{N_{xy}^2}{G_{xy}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (9) \end{aligned}$$

2. 2 平衡方程式と適合方程式

板の面内および板厚方向の平衡方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\begin{aligned} &D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ &= N_x \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right\} + N_y \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \right\} + 2N_{xy} \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、面内平衡方程式(10)を満足する応力関数 F を次式のように定義する。

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

板厚方向の平衡方程式(11)に上式(12)を代入すると次式のようにになる。

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ & = h \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

一方、適合方程式は式(1)から u , v を消去すると、

$$\begin{aligned} & H_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (2H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + H_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \\ & = \frac{1}{h} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (14)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= A_{22} A_{66} / H, & H_{12} &= -A_{12} A_{66} / H \\ H_{22} &= A_{11} A_{66} / H, & H_{66} &= (A_{11} A_{22} - A_{12}^2) / H \\ H &= A_{11} A_{22} A_{66} - A_{12}^2 A_{66} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

である。

結局、一次座屈後の挙動解析では、一次座屈後の板厚方向の平衡方程式と適合方程式の応力関数とたわみ波形に関する連立偏微分方程式を与えられた境界条件の下で解けばよいが、厳密解を得ることは極めて難しいので、以下近似的に解くことにする。

2.3 一次座屈後の挙動解析

周辺単純支持の場合、一次座屈後の板厚方向の面外境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad a \text{ で } w = w_{,xx} = 0 \\ y=0, \quad b \text{ で } w = w_{,yy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

であり、面内境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad a \text{ で } u \text{ は } y \text{ 軸に沿って一定で} \\ \int_0^b N_x dy = -\bar{N}_x b, \quad N_{xy} = 0 \\ y=0, \quad b \text{ で } v \text{ は } x \text{ 軸に沿って一定で} \\ \int_0^a N_y dx = -\bar{N}_y a, \quad N_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

である。面外境界条件を満足するように、一次座屈後のたわみ波形 w 、初期たわみ w_0 を板の中央点について対称および逆対称モードの2項近似表示する。

$$\left. \begin{aligned} w &= w_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) + w_{21} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \\ w_0 &= c_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) + c_{21} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここで、 c_{11} , c_{21} は初期たわみの大きさを表している。上式を式(14)の適合方程式へ代入し、面内境界条件を満足する応力関数 F を求めると次式のように表される。

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2h\lambda^2} (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11}) \\ & \quad \left\{ \frac{\lambda^4}{16H_{22}} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16H_{11}} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right\} \\ & \quad + \frac{2}{h\lambda^2} (w_{21}^2 + 2w_{21}c_{21}) \\ & \quad \left\{ \frac{\lambda^4}{256H_{22}} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16H_{11}} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right\} \\ & \quad - \frac{1}{4h\lambda^2} (w_{11}w_{21} + w_{11}c_{21} + w_{21}c_{11}) \\ & \quad \left[\frac{\lambda^4}{H_{22}} \left\{ \frac{1}{9} \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right\} \right. \\ & \quad \left. - \frac{\lambda^4 \cos(3\pi x/a) \cos(2\pi y/b)}{81H_{22} + 36(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} + \right. \\ & \quad \left. \frac{\lambda^4 9 \cos(\pi x/a) \cos(2\pi y/b)}{H_{22} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \right] - \frac{\sigma_x y^2}{2} - \frac{\sigma_y x^2}{2} \end{aligned} \quad (19)$$

となる。ここで、 λ ($=a/b$) は板のアスペクト比である。さらに、板厚方向の平衡方程式(13)へ代入し、Galerkin法を適用すると、応力とたわみに関する三次方程式が得られ、Newton-Raphson法を適用し、 w_{11} , w_{21} が求められる⁷⁾。また、積層板の中央面での x 軸方向の平均軸縮み ε_{mx} は、

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mx} &= -\frac{1}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{a} \int_0^a \left\{ \varepsilon_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right\} dx \\ &= H_{11} \sigma_x h + \frac{\pi^2}{8a^2} (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11} + 4w_{21}^2 + 8w_{21}c_{21}) \end{aligned} \quad (20)$$

で与えられ、平均軸圧縮応力 σ_x との関係が得られる。

2.4 一次座屈後の安定判別法

平衡方程式はエネルギー停留原理により、全ポテンシャルエネルギー Π の第一変分 $\delta\Pi$ を零と等価しても求められるが、平衡方程式の安定判別は次に示す Π の第2変分の正負から議論できる。

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{h} \left\{ \frac{\delta N_x^2}{E_x} + \frac{\delta N_y^2}{E_y} - \left(\frac{v_x}{E_x} + \frac{v_y}{E_y} \right) \delta N_x \delta N_y + \frac{\delta N_{xy}^2}{G_{xy}} \right\} \right. \\ & + \left. \left\{ N_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + N_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \\ & + \left. \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + D_{22} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (21) \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \delta N_x &= \frac{E_x h}{1 - \nu_x \nu_y} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu_y \left\{ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} \right] \\ \delta N_y &= \frac{E_y h}{1 - \nu_x \nu_y} \left[\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu_x \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right\} \right] \\ \delta N_{xy} &= G_{xy} h \left[\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \right\} (22)$$

である。式(21)において、 $\delta^2 \Pi > 0$ なら安定となり、 $\delta^2 \Pi = 0$ なら中立平衡、 $\delta^2 \Pi < 0$ なら不安定である。 $\delta^2 \Pi$ の正負を決定するためには、適切な仮想変位を想定すればよいが、そのままでは無限数存在することから、安定判別は困難である。従って一つの方法として、 $\delta^2 \Pi$ が極値をとるように仮想変位を求め、安定判別を実行する。仮想変位に関する境界条件の下に $\delta^2 \Pi$ を x , y , z 軸それぞれの微小擾乱仮想変位 δu , δv , δw について変分し、次式のような平衡方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} (23)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 \delta w}{\partial y^4}$$

$$\begin{aligned} &= \delta N_x \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right\} + 2\delta N_{xy} \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} + \delta N_y \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \right\} \\ &+ N_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (24)$$

面内平衡方程式(23)を満足させる仮想応力関数 δF を導入し、次式のように定義する。

$$\delta N_x = h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial y^2}, \quad \delta N_y = h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2}, \quad \delta N_{xy} = -h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x \partial y} \quad (25)$$

また、仮想変位に対する適合方程式は式(22)の δu , δv を消去することにより、次式のように求められる。

$$\begin{aligned} &H_{22} \frac{\partial^4 \delta F}{\partial x^4} + (2H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 \delta F}{\partial x^2 \partial y^2} + H_{11} \frac{\partial^4 \delta F}{\partial y^4} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

微小擾乱仮想変位および仮想面内力が満足すべき境界条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad a \text{ で } \delta u &= 0, \quad \delta N_{xy} = 0, \quad \delta w = \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = 0 \\ y=0, \quad b \text{ で } \delta v &= 0, \quad \delta N_{xy} = 0, \quad \delta w = \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} (27)$$

また、上式の境界条件を満足するように、微小擾乱仮想変位 δw を次式のように定義する。

$$\delta w = \delta w_{pq} \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \quad (28)$$

ここで、 p , q は一次座屈後に不安定現象が起こった場合の微小擾乱半波数であり、正整数であるが、平衡状態での主たわみ波形と同一の場合は式(27)の δu , δv を満足しないため除外する。以上の関係式を適合条件式(26)に代入し、仮想応力関数 δF を求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \delta F &= \frac{\lambda^2}{4h} \delta w_{pq} (w_{11} + c_{11}) \\ &\times \left[\frac{\cos \left\{ \frac{(1+p)\pi x}{a} \right\} \cos \left\{ \frac{(1+q)\pi y}{b} \right\} (p-q)^2}{H_{22} (1+p)^4 + \lambda^2 (2H_{12} + H_{66}) (1+p)^2 (1+q)^2 + \lambda^4 H_{11} (1+q)^4} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\cos\left\{\frac{(1+p)}{a}\pi x\right\}\cos\left\{\frac{(1-q)}{b}\pi y\right\}(p+q)^2}{H_{22}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1-q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1-q)^4} \\
 & + \frac{\cos\left\{\frac{(1-p)}{a}\pi x\right\}\cos\left\{\frac{(1+q)}{b}\pi y\right\}(p+q)^2}{H_{22}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1+q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1+q)^4} \\
 & - \left. \frac{\cos\left\{\frac{(1-p)}{a}\pi x\right\}\cos\left\{\frac{(1-q)}{b}\pi y\right\}(p-q)^2}{H_{22}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1-q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1-q)^4} \right] \\
 & + \frac{\lambda^2}{4h} \delta w_{pq}(w_{21} + c_{21}) \\
 & \times \left[\frac{\cos\left\{\frac{(2+p)}{a}\pi x\right\}\cos\left\{\frac{(1+q)}{b}\pi y\right\}(p-2q)^2}{H_{22}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1+q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1+q)^4} \right. \\
 & + \frac{\cos\left\{\frac{(2+p)}{a}\pi x\right\}\cos\left\{\frac{(1-q)}{b}\pi y\right\}(p+2q)^2}{H_{22}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1-q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1-q)^4} \\
 & + \frac{\cos\left\{\frac{(2-p)}{a}\pi x\right\}\cos\left\{\frac{(1+q)}{b}\pi y\right\}(p+2q)^2}{H_{22}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1+q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1+q)^4} \\
 & \left. - \frac{\cos\left\{\frac{(2-p)}{a}\pi x\right\}\cos\left\{\frac{(1-q)}{b}\pi y\right\}(p-2q)^2}{H_{22}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1-q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1-q)^4} \right] \quad (29)
 \end{aligned}$$

ここで、式(12)と式(19)よりそれぞれの合応力成分 N_x , N_y , N_{xy} を求め、次に式(25)と式(29)より、仮想応力成分 δN_x , δN_y , δN_{xy} を求め、さらに式(18)の w , w_0 , 式(28)の δw を第二変分 $\delta^2 \Pi$ に代入し、二重積分を実行すると安定判別式を得る。

3. 数値計算例と解析結果の検討

炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材の板厚方向に均質なるアングルプライ積層板について数値計算を実行した。その基本弾性定数(繊維容積含有率 $V_f=60\%$)は、平均化近似解法により計算され、実験でも確認された値である⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned}
 E_L &= 137 \text{ (GPa)}, E_T = 8.17 \text{ (GPa)}, G_{LT} = 4.75 \text{ (GPa)} \\
 \nu_L &= 0.316, \nu_T = 0.0189
 \end{aligned} \right\} (30)$$

本計算例では、初期たわみを考慮した場合について検討

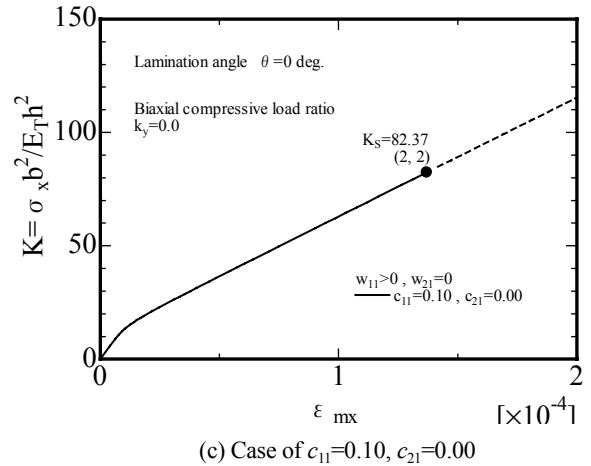
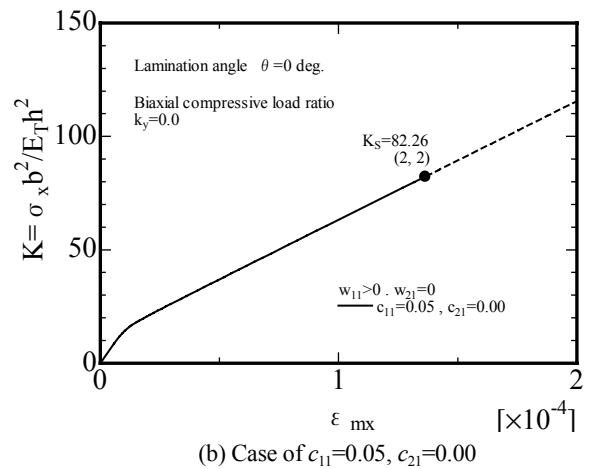
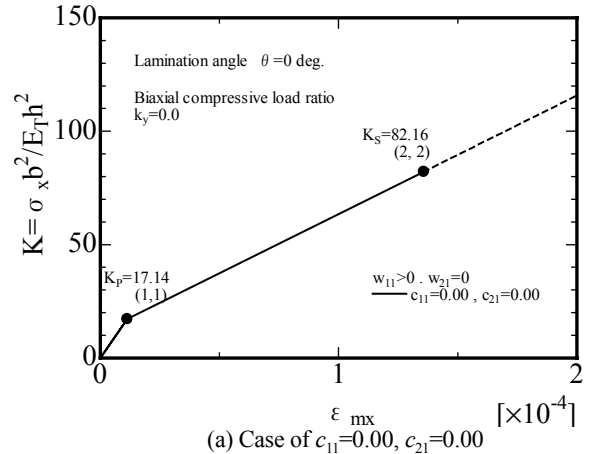


Fig.2 The relation between K and ϵ_{mx} of angle-ply laminated plates with initial imperfection and biaxial compressive load ratio $k_y=0$.

する。まず、図2に $a/b=1$, 積層角 $\theta=0\text{deg}$ で無次元平均軸圧縮応力 $K(=\sigma_x b^2 / E_T h^2)$ と x 軸方向の平均軸縮み ϵ_{mx} の関係を(a)~(c)にそれぞれ示す。なお、(a)は初期たわみが無い場合 ($c_{11}=c_{21}=0$)を示し、(b)は $c_{11}=0.05$, そして、(c)は $c_{11}=0.10$ の計

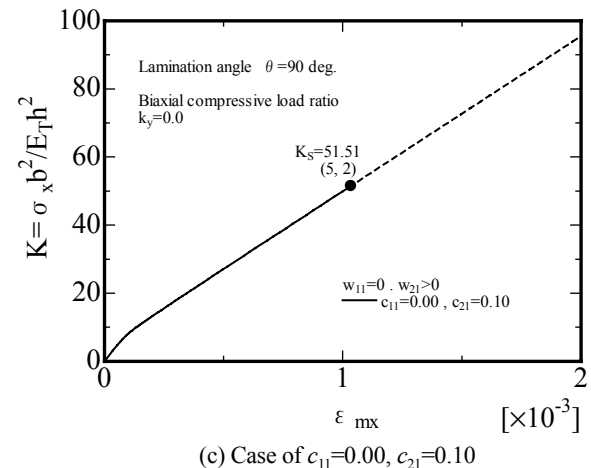
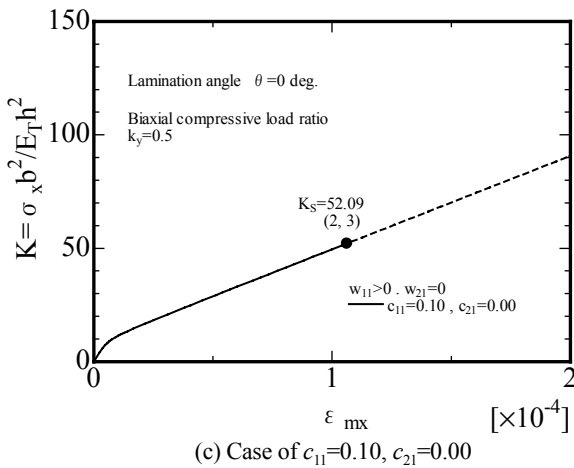
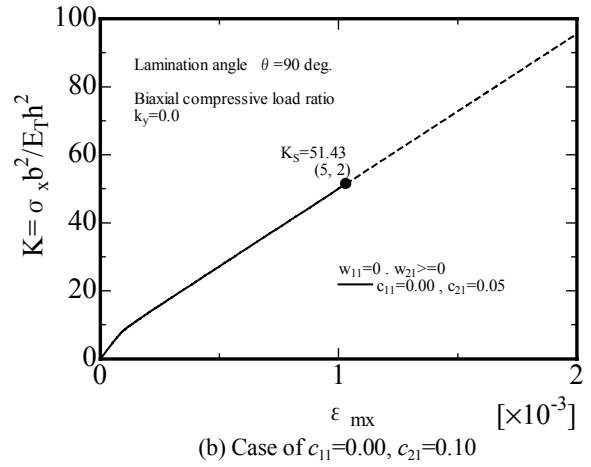
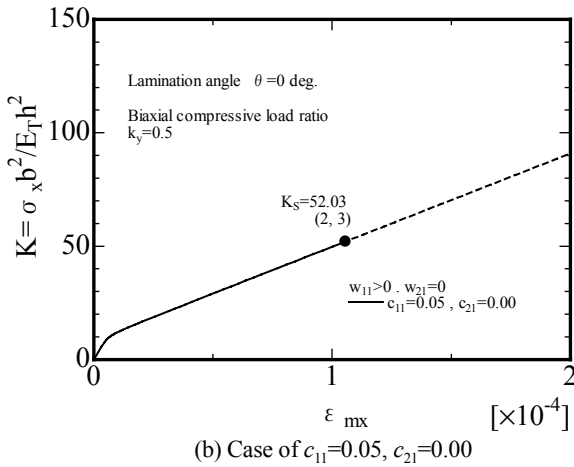
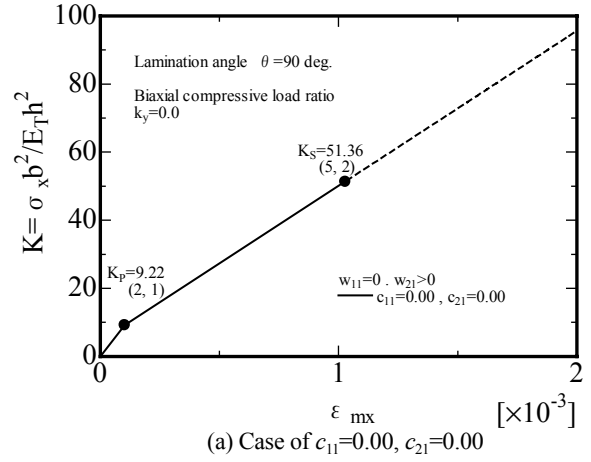
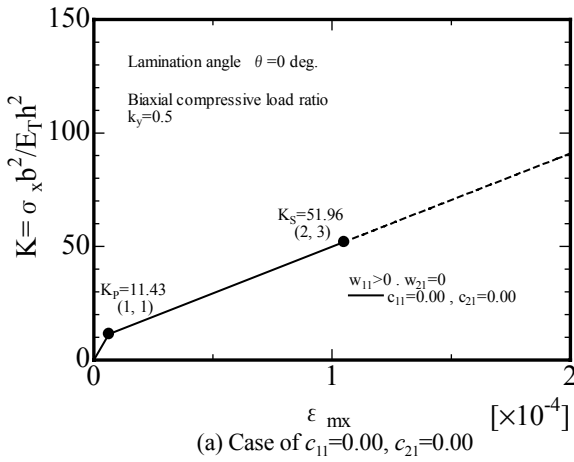


Fig.3 The relation between K and ϵ_{mx} of angle-ply laminated plates with initial imperfection and biaxial compressive load ratio $k_y=0.5$.

Fig.4 The relation between K and ϵ_{mx} of angle-ply laminated plates with initial imperfection and biaxial compressive load ratio $k_y=0.0$

算結果を示す。また、二軸圧縮比を $k_y (= \sigma_y / \sigma_x)$ とし、 $k_y = 0.0$ は一軸圧縮負荷に相当、その他は二軸圧縮負荷になることを意味する。図中の K_p 、 K_s はそれぞれ一次座屈値および二次座屈値を示し、座屈時の x 、 y 軸方向の半波数の値を括弧内に示し

ている。ここで、 c_{11} 、 c_{21} は式(18)に示されるように、対称モードと非対称モードによる初期たわみの大きさを表している。なお、 $c_{11}=0.10$ は x 、 y 軸方向にそれぞれ 1 半波でその大きさは板厚 h の 10% の場合を示す。さらに、積層角 $\theta = 0$ deg で二軸圧縮

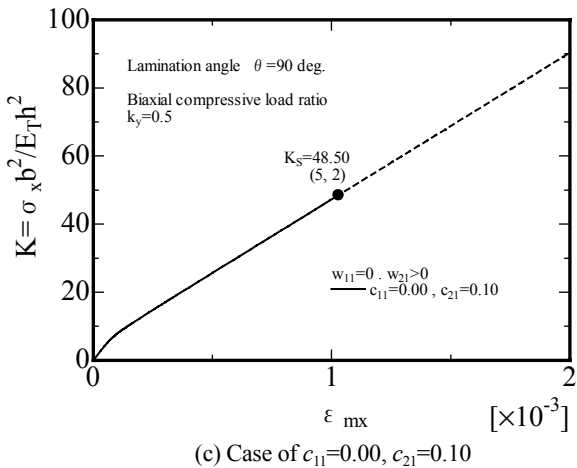
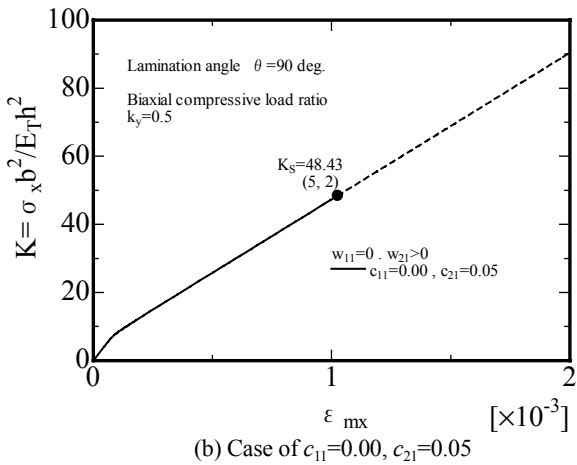
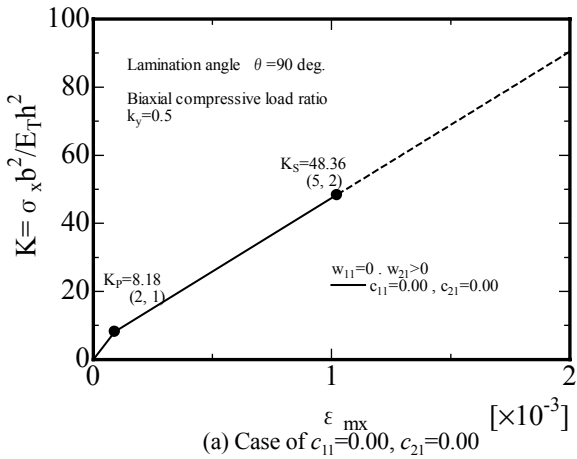


Fig.5 The relation between K and ϵ_{mx} of angle-ply laminated plates with initial imperfection and biaxial compressive load ratio $k_y=0.5$.

比 $k_y=0.5$ の場合を図 3 に示す。同様な条件で積層角 $\theta=90$ deg. で一軸圧縮負荷($k_y=0.0$)を図 4 に、二軸圧縮負荷($k_y=0.5$)の場合を

図 5 にそれぞれ示す。図 2 および図 3 に示す積層角 $\theta=0$ deg. のアングルプライ積層板の一次座屈後のたわみ波形については w_{11} が支配的な場合になっているため、一次座屈時の波形が x, y 軸方向について、それぞれ 1 半波となることから w_{21} を考慮していない。一方、図 4 および図 5 については、一次座屈時の波形が x 軸方向は 2 半波、 y 軸方向は 1 半波となっているため、一次座屈後の波形は w_{21} が支配的となることから w_{11} を考慮していない。なお、各図において二次座屈値 K_S までは実線で示すが二次座屈値以降の挙動は破線で示す。

次に初期たわみの影響を見るため、 c_{11} を 0.00, 0.05, 0.10, c_{21} を 0.00, 0.05, 0.10 と変化させた際の積層角 θ に対する

Table 1 Secondary buckling stresses of angle-ply laminated plates with variation of amplitude of initial imperfection under uniaxial compression ($k_y=0.0$).

θ deg.	c_{11}	c_{21}	p	q	K_S
0.0	0.00	0.00	2	2	82.16
	0.05	0.00	2	2	82.26
	0.10	0.00	2	2	82.37
22.5	0.00	0.00	3	2	188.18
	0.05	0.00	3	2	188.28
	0.10	0.00	3	2	188.38
45.0	0.00	0.00	5	2	266.75
	0.05	0.00	5	2	266.82
	0.10	0.00	5	2	266.90
67.5	0.00	0.00	7	2	155.83
	0.00	0.05	7	2	155.93
	0.00	0.10	7	2	156.03
90.0	0.00	0.00	5	2	51.36
	0.00	0.05	5	2	51.43
	0.00	0.10	5	2	51.51

Table 2 Secondary buckling stresses of angle-ply laminated plates with variation of amplitude of initial imperfection under biaxial compression ($k_y=0.5$).

θ deg.	c_{11}	c_{21}	p	q	K_S
0.0	0.00	0.00	2	3	51.96
	0.05	0.00	2	3	52.03
	0.10	0.00	2	3	52.09
22.5	0.00	0.00	2	3	143.39
	0.05	0.00	2	3	143.54
	0.10	0.00	2	3	143.71
45.0	0.00	0.00	6	2	285.17
	0.05	0.00	6	2	285.20
	0.10	0.00	6	2	285.24
67.5	0.00	0.00	7	2	156.31
	0.00	0.05	7	2	156.39
	0.00	0.10	7	2	156.49
90.0	0.00	0.00	5	2	48.36
	0.00	0.05	5	2	48.43
	0.00	0.10	5	2	48.50

二次座屈時の微小擾乱半波数 p , q および二次座屈値 K_s の結果を表 1 および表 2 に示し、表 1 は一軸圧縮負荷 ($k_y=0.0$)、表 2 は二軸圧縮負荷 ($k_y=0.5$) の結果である。なお、積層角 θ は 0.0, 22.5, 45.0, 67.5, 90.0deg と変化させた。

解析手方法は、既報⁵⁾に示したように微小擾乱半波数 p , q をそれぞれ変化させ $\delta^2\Pi=0$ となる場合、つまり安定限界での荷重値を算出し、その中で最小値を二次座屈値とする。これより、初期たわみの有無に関わらず、二次座屈現象の起こる微小擾乱半波数 p , q は一致していることを確認し、その一例は表 1 および 2 に示す通りである。また、微小擾乱半波数 p , q の値が小さいと常に安定状態となり、二次座屈現象を示すことができない場合がある。しかし、ほとんどの微小擾乱半波数 p , q において安定状態から不安定状態に変化するため、二次座屈現象の必然性を示すことができた。

図 2～図 5 より、二次座屈値は一次座屈値に比べ数倍大きな値となっていることから、一次座屈後もかなりの耐荷能力があると考えられる。一次座屈後の剛性が一次座屈前の剛性に比べ低いことは、一次座屈前後で傾きが違うことより示され、また、それらの傾きの大きさは、微小擾乱半波数の影響を大きく受けるものと考えられる⁵⁾。

表 1 および表 2 に示す解析結果より、本論文で設定した初期たわみのレベルであれば、二次座屈現象で発生する不安定モード p , q は完全に一致していることがわかる。また、初期たわみがない場合の二次座屈値と各初期たわみの組合せによる二次座屈値にそれほど違いが見受けられないことから、初期たわみが 10% 程度であれば二次座屈値への影響は小さいものと考えられる。

4. 結 言

本論文では、二軸圧縮負荷を受ける周辺単純支持された初期不整を有するアングラプライ積層板の二次座屈現象について、一次座屈後の挙動を理論的に解析し、いまだ研究例の少ない一次座屈後の不安定現象、つまり二次座屈現象の必然性を全ポテンシャルエネルギーの第二変分を用いた安定判別法により示した。これより、一次座屈後のアングラプライ積層板の耐荷能力を明らかにすることで初期たわみが二次座屈値に与える影響について理論的に示した。

今後の課題として、面内圧縮負荷を受ける積層板の一次座屈の最適化は福永¹⁰⁾、三木ら¹¹⁾によって明らかにされているので、上記の最適化手法を応用し、積層板の二次座屈値に対する最適設計手法を確立することである。

参考文献

- 1) 植村益次, 他 3 名: FRP 構造強度計算の実際, 強化プラスチック協会 (1984).
- 2) 小林繁夫, 住原清秀, 紀平正知: CFRP 積層板の圧縮座屈強度 (第 1 報), 日本航空宇宙学会誌, Vol.28, No.317 (1980), 293.
- 3) M.Stein: Postbuckling of Orthotropic Composite Plates Loaded in Compression, AIAA Journal, Vol.21, No.12 (1983), 1729.
- 4) 邊吾一・植村益次: 一軸圧縮負荷を受ける薄板の二次座屈現象に関する研究, 日本機械学会論文集, Vol.43, No.372 (1977), 2818.
- 5) 粕谷平和, 根本圭一, 辻本真之: 面内圧縮負荷を受けるアングラプライ積層平板の座屈強度, 日本設計工学会誌, Vol.42, No.9 (2007), 501.
- 6) 根本圭一, 辻本真之, 粕谷平和: 二軸圧縮負荷を受けるアングラプライ積層矩形板の二次座屈特性, 東海大学紀要工学部, Vol.46, No.2 (2008), 115.
- 7) Keiichi Nemoto, Masayuki Tsujimoto and Hirakazu Kasuya, Analysis of Postbuckling Behavior of Angle-Ply Laminated Plates with Small Initial Curvature under Biaxial Compressive Loads, Proc. Sch. Eng. Tokai Univ., Ser. E, Vol.32 (2007), 7.
- 8) R.M.Jones: "Mechanics of Composite Materials", McGraw-Hill (1975).
- 9) 植村益次, 山田直樹: 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24, No.257 (1975), 156.
- 10) 福永久雄: 積層板の圧縮座屈特性と最適化, 日本航空宇宙学会誌, Vol.30, No.343 (1982), 46.
- 11) 三木光範, 杉山吉彦, 桜井健司: 面内二軸圧縮負荷を受ける繊維強化複合材料積層板の最適設計, 材料, Vol.40, No.450 (1991), 308.