

## 二軸圧縮負荷を受けるクロスプライ積層矩形板の二次座屈強度

根本圭一\*<sup>1</sup>・山口 齊\*<sup>2</sup>・遠藤 翔\*<sup>2</sup>・菊川久夫\*<sup>3</sup>・粕谷平和\*<sup>4</sup>

# Secondary Buckling Strength of Cross-Ply Laminated Rectangular Plates Subjected to Biaxial Compressive Loads

by

Keiichi NEMOTO, Hitoshi YAMAGUCHI, Sho ENDO, Hisao KIKUGAWA

and Hirakazu KASUYA

(Received on Mar. 30, 2009, accepted on Jul. 6, 2009)

### Abstract

Advanced fiber-reinforced composite materials have been used as structural members in various fields, because of their high strength and high stiffness-to-weight ratios, and hence analysis of thin laminated structures is important. Postbuckling behaviors of thin laminated plates under uniaxial compression have been discussed by many researchers. However, little research has been performed on the secondary buckling phenomenon for thin laminated plate which occurs with further increase of load. In this paper, the stability condition of carbon-epoxy cross-ply laminated rectangular plates under biaxial compression which are simply supported along four edges is determined, using the second variation of total potential energy. The necessity of secondary buckling is proven analytically, and the effects of various factors, such as plate aspect ratio, outer lamination angle, number of layers and biaxial compressive load ratio, are clarified.

**Keywords:** *Structural Analysis, Composite Materials, CFRP, Secondary Buckling, Cross-Ply Laminated Plates, Biaxial Compression*

## 1. 緒 言

構造物の軽量化にともない、比強度、比剛性の優れた先進複合材料は、各分野の構造部材に多数用いられるようになってきた。複合材料積層構造を規定する限界強度としては、材料の破損強さと剛性の両方の観点から検討する必要があるが、特に繊維強化プラスチック構造物は軽量化のため薄肉であることが多く、圧縮応力が大きいと構造は不安定となり座屈を起こして破損する恐れがあるため、座屈限界応力が問題となる<sup>1)</sup>。

面内圧縮負荷を受ける薄板は座屈後も荷重低下がなく耐荷能力があるため、一次座屈後も使用可能である<sup>2),3)</sup>。しかし一次座屈後さらに荷重を加えても、いつまでも安定状態が続くわけ

ではなく、ある荷重において不安定となり、耐荷剛性がさらに低下する二次座屈現象が起こる。従来、等方性材料の二次座屈現象に関して、正方形板<sup>2)</sup>、矩形板の研究<sup>3)~5)</sup>があり、特に T. Nakamura and K. Uetani<sup>4)</sup>は板のアスペクト比に対して一次座屈応力と二次座屈応力の相関関係を理論的に示し、一次座屈の座屈モードが変化したアスペクト比において二次座屈値が不連続になることを解析結果から明らかにしているが、二軸圧縮負荷を受ける矩形板の二次座屈について述べている論文は著者の知る限り見当たらない。

本論文においては、前報<sup>6)</sup>の解析手法を拡張し、二軸圧縮負荷を受ける対称クロスプライ積層矩形板を例に取り、全ポテンシャルエネルギーの第二変分値により一次座屈後の平衡状態の安定判別を行う方法を用いて明らかにする。また、二次座屈現象に与える諸因子、二軸圧縮比、最外層積層角、積層数、板のアスペクト比などの影響を解析的手法により明らかにするとともに、積層板の圧縮座屈の最適設計<sup>7)</sup>における参考資料とする。さらに、一軸圧縮負荷を受ける直交異方性積層矩形板の一次座

\* 1 : 横浜ゴム株式会社 航空部品技術部

\* 2 : 工学研究科機械工学専攻

\* 3 : 情報デザイン工学部情報システム学科 准教授

\* 4 : 動力機械工学科 教授

屈応力の最小値<sup>8)</sup>は座屈応力式をアスペクト比で微分することで算出できることが示されている。そこで、アスペクト比に対する二次座屈応力の最小値を考察し、二次座屈応力に対する設計基準を確立するとともに、一次座屈との比較ならびに相関関係について示す。

## 2. 複合材料積層板の一次座屈解析

図1に示すような対称クロスプライ積層矩形板(板幅  $a$ ,  $b$ , 板厚  $h$ )が  $x$ ,  $y$  方向からの二軸圧縮負荷  $\bar{N}_x$ ,  $\bar{N}_y$  を受ける場合を考える。ここで、一次座屈後の挙動解析をする前に積層矩形板のアスペクト比に対する一次座屈特性について示す。

### 2.1 一軸圧縮負荷を受ける場合

$x$  方向からの一軸圧縮負荷  $\bar{N}_x$  のみを受けるクロスプライ積層板の座屈荷重は以下のように求められる<sup>8)</sup>。

$$\bar{N}_x = \pi^2 \frac{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4}{\left(\frac{m}{a}\right)^2} \quad (1)$$

ここで、 $D_{ij}(i,j=1,2,6)$ は積層板の曲げ剛性を示し、異方性材の繊維方向、繊維に直角方向の縦弾性係数  $E_L$ ,  $E_T$ , ポアソン比  $\nu_L$ ,  $\nu_T$ , せん断弾性係数  $G_{LT}$  および積層角  $\theta$  が与えられると求められる<sup>9)</sup>。なお、添え字の L は繊維の長手方向“Longitudinal”, T は繊維と直角方向“Transverse”の頭文字をそれぞれ意味する。また、 $mn$  は座屈時の  $x, y$  方向の軸方向半波数をそれぞれ表す。

式(1)は  $n=1$  の場合、最小座屈荷重となる。従って、式(1)で  $n=1$  と置き各半波数  $m$  の値について、座屈荷重と矩形板のアスペクト比  $\lambda = a/b$  の関係を求めればよい。つまり与えられた  $\lambda$  の値に対して最小の座屈応力  $\sigma_x$  を与える。よって、 $\sigma_x (= \bar{N}_x/h)$  を最小値にするアスペクト比  $\lambda$  の値は次式で示される。

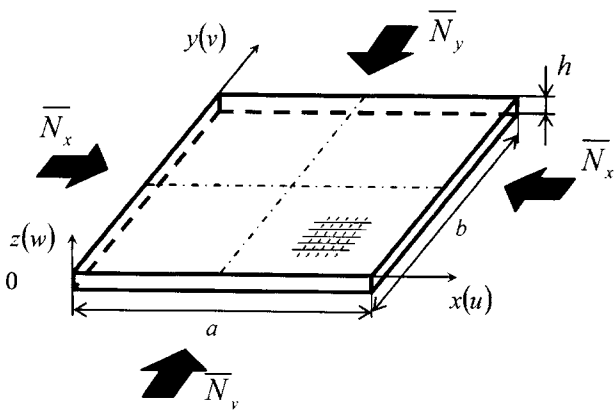


Fig.1 Configuration and coordinates of cross-ply laminated rectangular plate under biaxial compressive loads.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial (\lambda/m)} = 0 \quad (2)$$

ここで、 $\alpha = \lambda/m$  と置き式(1)を式(2)へ代入すると次式のようなになる。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \alpha} = \frac{\pi^2}{b^2 h} \left[ -2 \frac{D_{11}}{\alpha^3} + 2D_{22} \alpha \right] = 0 \quad (3)$$

よって、最小座屈応力を得るアスペクト比の関係は次式となる。

$$\alpha = \sqrt[4]{D_{11}/D_{22}} \quad \text{また} \quad \lambda = m \sqrt[4]{D_{11}/D_{22}} \quad (4)$$

従って、式(4)を式(1)に代入すると最小座屈応力  $\sigma_{x,mm}$  が次式のように求められる。

$$\sigma_{x,mm} = \frac{2\pi^2}{b^2 h} \left[ \sqrt{D_{11}D_{22}} + (D_{12} + 2D_{66}) \right] \quad (5)$$

さらに、式(1)に示す座屈固有値はアスペクト比  $\lambda$  によって、 $x$  方向の座屈半波数  $m$  が変化する。よって、座屈モード  $m$  が異なるが同一の座屈固有値となるアスペクト比  $\lambda$  が存在する。座屈値が一致する際のアスペクト比  $\lambda$  は式(1)に  $n=1$ ,  $m$  および  $m+1$  と連続にすることで次式のような方程式が導かれる。

$$\begin{aligned} & \pi^2 \frac{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{1}{b}\right)^4}{\left(\frac{m}{a}\right)^2} \\ &= \pi^2 \frac{D_{11} \left(\frac{m+1}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m+1}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{1}{b}\right)^4}{\left(\frac{m+1}{a}\right)^2} \quad (6) \end{aligned}$$

上式(6)を  $\lambda$  について解くと次式が得られる。

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \sqrt{m(m+1)} \quad (7)$$

以上より、 $x$  方向からの一軸圧縮負荷時の最小座屈応力  $\sigma_{x,mm}$  および座屈モードが変化する時の臨界アスペクト比  $\lambda$  がそれぞれ得られる。

### 2.2 二軸圧縮負荷を受ける場合

$x, y$  方向からの二軸圧縮負荷  $\bar{N}_x, \bar{N}_y$  を受ける複合材料積層板の座屈荷重は以下のように求められる<sup>8)</sup>。

$$\bar{N}_x = \pi^2 \frac{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + k_y \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (8)$$

ここで、 $k_y = \bar{N}_y / \bar{N}_x$  であり、 $k_y$  は二軸圧縮比を示す。二軸圧縮荷重が作用する場合は二軸圧縮比  $k_y$  の値によって、 $n \neq 1$  ( $n > 1$ )

が存在するため、単軸圧縮負荷と同様に  $n=1$  としてアスペクト比で偏微分して最小座屈荷重を得ることは出来ない。よって、与えられた二軸圧縮比  $k_y$  下で  $x, y$  軸方向半波数  $m, n$  をそれぞれ変化させ、最小値が座屈値である。

### 3. 一次座屈後の解析法

#### 3.1 一次座屈後の挙動解析

Fig.1 に示すようなクロスプライ積層矩形板が面内圧縮荷重  $\bar{N}_x, \bar{N}_y$  を受ける場合を考え、中央面の変位を  $u, v, w$  とする。面内ひずみ  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 、曲率成分  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  と変位  $u, v, w$  との関係は座屈後の安定問題を解析するために、二次の微小項を考慮した有限変形理論を用いると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, & \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, & \kappa_{xy} &= -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

一次座屈後の挙動解析では、一次座屈後の平衡方程式と適合方程式の応力関数とたわみの連立偏微分方程式を解けばよいが、非線形問題であり厳密解を得ることは困難である。したがって、Galerkin 法を用いることにより近似解を得ることができる<sup>6)</sup>。

周辺単純支持の場合、一次座屈後の板厚方向の面外境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x=0, a \\ w &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at } y=0, b \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

であり、面内境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で } u \text{ は } y \text{ 軸に沿って一定で} \\ \int_0^b N_x dy = -\bar{N}_x b, \quad N_{xy} = 0 \\ y=0, b \text{ で } v \text{ は } x \text{ 軸に沿って一定で} \\ \int_0^a N_y dx = -\bar{N}_y a, \quad N_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。ここで、 $N_x, N_y, N_{xy}$  は単位幅当りの面内力である。

板厚方向の面外境界条件を満足するように、一次座屈後のたわみ波形  $w$  を次式のように近似表示する。

$$w = W_{mn} \sin(m \pi x/a) \sin(n \pi y/b) \quad (13)$$

面内境界条件を満足する応力関数を求め、Galerkin 法を適用することにより次式のような  $w_{mn}$  に関する三次方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\pi W_{mn}}{4\lambda} \\ & \times \left\{ \frac{1}{h} \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \left[ D_{11} \left( \frac{m}{\lambda} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})n^2 + D_{22}n^4 \left( \frac{\lambda}{m} \right)^2 \right] \right. \\ & \left. + \frac{W_{mn}^2}{16h} \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \left[ \frac{1}{H_{11}} \left( \frac{m}{\pi} \right)^2 + \frac{n^4}{H_{22}} \left( \frac{\lambda}{m} \right)^2 \right] - \sigma_x (1+k_y) \right\} = 0 \quad (14) \end{aligned}$$

#### 3.2 一次座屈後の安定判別

一次座屈後の平衡状態の安定判別は、変位成分に関する第二変分の正負から議論できる。第二変分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= \frac{1}{2} \iint_0^a \iint_0^b \left\{ \frac{1}{h} \left[ \frac{\delta N_x^2}{E_x} + \frac{\delta N_y^2}{E_y} - \left( \frac{v_x}{E_x} + \frac{v_y}{E_y} \right) \delta N_x \delta N_y + \frac{\delta N_{xy}^2}{G_{xy}} \right] \right. \\ & \left. + \left\{ N_x \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + N_y \left( \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + D_{22} \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right\} dx dy \quad (15) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta N_x &= \frac{E_x h}{1-\nu_x \nu_y} \left[ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \nu_y \left\{ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} \right] \\ \delta N_y &= \frac{E_y h}{1-\nu_x \nu_y} \left[ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left( \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \nu_x \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right\} \right] \\ \delta N_{xy} &= G_{xy} h \left[ \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

である。式(15)において、 $\delta^2 \Pi > 0$  なら安定となり、 $\delta^2 \Pi = 0$  なら中立平衡、 $\delta^2 \Pi < 0$  なら不安定である。ここで仮想変位の想定は、 $\delta^2 \Pi$  の絶対的な正負の判定に関係する。よって、適切な仮想変位を想定する方法として、第二変分  $\delta^2 \Pi$  の仮想変位成分について極値を求める必要がある。

微小擾乱仮想変位および仮想面内力が満足すべき境界条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \delta w &= \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = 0, \quad \delta u = 0, \quad \delta N_{xy} = 0 \quad \text{at } x=0, a \\ \delta w &= \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} = 0, \quad \delta v = 0, \quad \delta N_{xy} = 0 \quad \text{at } y=0, b \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

また、境界条件を満足するように、微小擾乱仮想変位  $\delta w$  を次式のように定義する。

$$\delta w = \delta w_{pq} \sin(p \pi x/a) \sin(q \pi y/b) \quad (18)$$

面内境界条件(12)を満足するように仮想応力関数 $\delta F$ を求め  
る。

$$\delta F = \frac{\lambda^2}{4h} w_{mn} \delta w_{pq} \left[ \begin{aligned} & \frac{(pn - qm)^4 \cos\left\{\frac{(p-m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q-n)\pi y}{b}\right\}}{H_{22}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ & - \frac{(pn - qm)^4 \cos\left\{\frac{(p+m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q+n)\pi y}{b}\right\}}{H_{22}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \\ & + \frac{(pn + qm)^4 \cos\left\{\frac{(p-m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q-n)\pi y}{b}\right\}}{H_{22}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ & + \frac{(pn + qm)^4 \cos\left\{\frac{(p+m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q+n)\pi y}{b}\right\}}{H_{22}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \end{aligned} \right] \quad (19)$$

式(15)の第二変分 $\delta^2 \Pi$ より、二重積分をすると安定判別式と  
して次式を得る。

$$\delta^2 \Pi = \delta w_{pq}^2 \left[ \frac{\lambda \pi^4 w_{mn}^2}{128 b^2 h} \times \left[ \begin{aligned} & - \frac{(pn - qm)^4 \delta \delta_p \delta \delta_q}{H_{22}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ & - \frac{(pn - qm)^4}{H_{22}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \\ & + \frac{(pn + qm)^4 \delta \delta_q}{H_{22}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ & + \frac{(pn + qm)^4 \delta \delta_p}{H_{22}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \end{aligned} \right] \right. \\ \left. + \frac{\pi^4 w_{mn}^2}{128 b^2 h} \left( \frac{m^2 p^2}{H_{11} \lambda^3} \delta_p + \frac{n^2 q^2}{H_{22}} \delta_q \right) - \sigma_x \left\{ \frac{(p\pi)^2}{8\lambda} h + k_y \frac{(q\pi)^2}{8} \lambda h \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{8} \frac{(p\pi)^4}{b^2 \lambda^3} \left[ D_{11} + 2\lambda^2 \left( \frac{q}{p} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \lambda^4 D_{22} \left( \frac{q}{p} \right)^4 \right] \right] \quad (20)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \delta \delta_p &= 2 \quad (p=m \text{ の時}) & \delta \delta_q &= 2 \quad (q=n \text{ の時}) \\ &= 1 \quad (p \neq m \text{ の時}) & &= 1 \quad (q \neq n \text{ の時}) \\ \delta_p &= 1 \quad (p=m \text{ の時}) & \delta_q &= 1 \quad (q=n \text{ の時}) \\ &= 0 \quad (p \neq m \text{ の時}) & &= 0 \quad (q \neq n \text{ の時}) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

これより、 $p, q$ を変化させることにより安定判別を行う。

#### 4. 数値計算例と解析結果の検討

炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材の対称クロスプライ積層板について数値計算を実行した。その基本弾性定数(繊維

容積含有率 $V_f=60\%$ )は、平均化近似解法により計算され、実験でも確認された値である<sup>10)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} E_L &= 137 \text{ (GPa)}, E_T = 8.17 \text{ (GPa)}, G_{LT} = 4.75 \text{ (GPa)} \\ \nu_L &= 0.316, \nu_T = 0.0189 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

まず、積層矩形板の二次座屈特性を明らかにする前に、 $x$ 軸方向から一軸圧縮負荷を受けるクロスプライ積層矩形板の一次座屈特性について明らかにする。最外層積層角 $\theta$ が $0, 90\text{deg}$ .の場合について、積層数 $N$ を $3, 5$ と変化させ、さらに、板厚方向に均質な直交異方性積層材( $N=\infty$ )について、式(4)および(5)から得られる一次座屈値の最小値および一次座屈値が最小となるアスペクト比 $\lambda$ の解析結果を一例として、 $m=1\sim 4$ について **Table 1** にそれぞれ示す。ここで、座屈値を無次元化し、 $K(=\sigma_c b^2/E_T h^2)$ とする。

さらに、一軸圧縮負荷を受け、一次座屈時の $x$ 軸方向の座屈半波数 $m$ が変化する点について、**Table 1**と同じ条件とし、 $x$ 軸方向の座屈半波数が $m=1\rightarrow 2, m=2\rightarrow 3, m=3\rightarrow 4$ へ変化する時の臨界アスペクト比 $\lambda$ を式(7)から算出し、さらにその時の座屈値を参考として括弧内に示し、**Table 2**にそれぞれ示す。後述するように、**Table 2**に示す $x$ 軸方向の座屈半波数 $m$ が変化するアスペクト比 $\lambda$ において、二次座屈値が不連続となるため、設計上注意しなければならない。

次に、クロスプライ積層矩形板の二次座屈について、一例として、最外層積層角 $\theta$ が $0, 90\text{deg}$ .の場合について、積層数 $N$ が $3, 5, \infty$ 層(板厚方向に均質な直交異方性)の場合について、アスペクト比 $\lambda$ を $0.5\sim 8.0$ まで変化させ、その解析結果を **Fig.2~4** にそれぞれ示し、さらに、二軸圧縮荷重比 $k_y$ の影響を見るために、 $k_y$ を $0.0, 0.5, 1.0$ とし、**Fig.2, 3**の(a)~(c), (d)~(f), **Fig.4**(a)~(c)にそれぞれ示す。ここで、 $k_y=0.0$ は $x$ 軸方向からの単軸圧縮負荷状態を表し、図中において、破線は一次座屈値、実線が二次座屈値であり、一例として $\lambda$ が $2.0, 4.0, 6.0$ における座屈時の $x, y$ 軸方向の半波数 $m, n$ と微小擾乱半波数 $p, q$ を示している。

クロスプライ積層矩形板における全ポテンシャルエネルギーの第二変分 $\delta^2 \Pi$ は微小擾乱半波数 $p, q$ の大きさに依存しており、このとき $p, q$ は一次座屈半波数 $m, n$ より必ず大きく常に整数値を取る。微小擾乱半波数 $p, q$ をそれぞれ変化させ $\delta^2 \Pi=0$ となる場合、つまり、安定限界での荷重値を算出し、その中の最小値を二次座屈値とする。微小擾乱半波数 $p, q$ の値が小さいと常に安定状態 $\delta^2 \Pi > 0$ となり、二次座屈現象を示すことができない場合がある。それ以外の微小擾乱半波数 $p, q$ の値では安定状態から不安定状態に変化するため、二次座屈現象の必然性を示すことが可能となった。

**Table 1, 2**の解析結果から各種層構成における最小一次座

Table 1 Relationship minimum primary buckling stresses and plate aspect ratio  $\lambda$  at outer lamination angle  $\theta$  and lamination constitutions.

| Outer lamination angle $\theta$ deg. | Laminated Constitution  | Minimum Primary Buckling $K_p$ | $\lambda_{cr} = m \times \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}}$ |       |       |       | Reference |
|--------------------------------------|-------------------------|--------------------------------|---|-------|-------|-------|-----------|
|                                      |                         |                                | $m=1$   | $m=2$ | $m=3$ | $m=4$ |           |
| 0                                    | $N=3$<br>[0/90/0]       | 10.80                          | 1.787   | 3.575 | 5.362 | 7.149 |           |
|                                      | $N=5$<br>[0/90/0/90/0]  | 14.99                          | 1.332   | 2.665 | 3.997 | 5.329 |           |
| 90                                   | $N=3$<br>[90/0/90]      | 10.80                          | 0.559   | 1.119 | 1.678 | 2.238 |           |
|                                      | $N=5$<br>[90/0/90/0/90] | 14.99                          | 0.751   | 1.501 | 2.252 | 3.002 |           |
| $N=\infty$                           |                         | 17.11                          | 1.000   | 2.000 | 3.000 | 4.000 |           |

Table 2 Relationship changed primary buckling mode  $m$  and plate aspect ratio  $\lambda$  at outer lamination angle  $\theta$  and lamination constitutions.

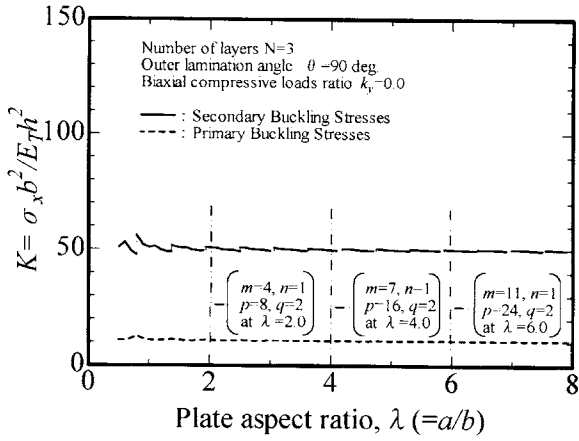
| Outer lamination angle $\theta$ deg. | Laminated Constitution  | $\lambda = \sqrt[4]{\frac{D_{22}}{D_{11}}} \sqrt{m(m+1)}$ |                     |                     | Reference |
|--------------------------------------|-------------------------|---|---------------------|---------------------|-----------|
|                                      |                         | $m=1 \rightarrow 2$                                       | $m=2 \rightarrow 3$ | $m=3 \rightarrow 4$ |           |
| 0                                    | $N=3$<br>[0/90/0]       | 2.528<br>(12.89)  | 4.378<br>(11.50)    | 6.191<br>(11.15)    |           |
|                                      | $N=5$<br>[0/90/0/90/0]  | 1.884<br>(18.12)  | 3.263<br>(16.03)    | 4.615<br>(15.51)    |           |
| 90                                   | $N=3$<br>[90/0/90]      | 0.791<br>(12.89)  | 1.370<br>(11.50)    | 1.938<br>(11.15)    |           |
|                                      | $N=5$<br>[90/0/90/0/90] | 1.061<br>(18.11)  | 1.838<br>(16.03)    | 2.600<br>(15.51)    |           |
| $N=\infty$                           |                         | 1.414<br>(20.77)  | 2.450<br>(18.30)    | 3.464<br>(17.72)    |           |

屈値およびその時のアスペクト比  $\lambda$  が明らかになり、さらに  $x$  軸方向の座屈半波数  $m$  が変化するアスペクト比  $\lambda$  について示し、これらは Fig. 2, 3 の(a), (d) および Fig. 4 の(a) の一軸圧縮荷重を受ける一次座屈の挙動と一致するものである。Fig. 2~4 に示すように、一次座屈値はアスペクト比  $\lambda$  の増加とともに座屈値は一定値へ収束していく。また、二次座屈値もアスペクト比の増加に伴い、収束していくことが明らかである。特に一軸圧縮荷重を受けるクロスプライ積層矩形板に対しては、二次座屈値は一次座屈の座屈モードが変化したアスペクト比で不連続となりながら、二次座屈値は一定値へ収束していく。これは一次座屈時の  $x$  軸方向半波数  $m$  が変化するため、二次座屈時の  $x$  軸方向の微小擾乱半波数  $p$  が高次となるため、そのアスペクト比にお

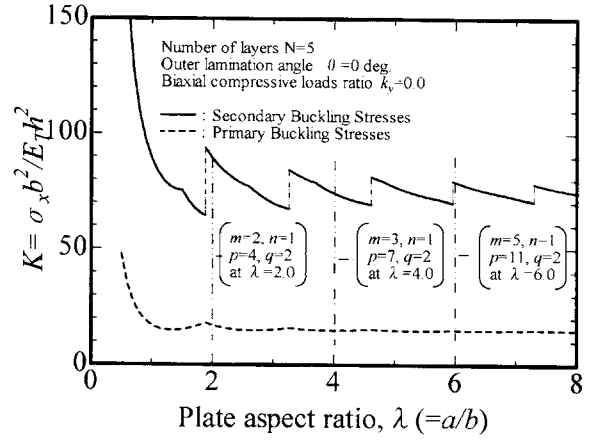
いて、二次座屈値が不連続となる。この二次座屈値の挙動については等方性材料の矩形板の解析結果<sup>4)</sup>と同一である。

さらに、二軸圧縮荷重比  $k_y$  を増加させると、一次座屈値、二次座屈値共に低下する。前述したように、二次座屈値は一次座屈時の座屈モード  $m, n$  に大きく依存するため、二軸圧縮荷重比  $k_y$  の変化によりアスペクト比が増加しても  $m=1$  で最小座屈値となると二次座屈値の微小擾乱半波数  $p$  も低次となるため、二次座屈値はアスペクト比の増加に伴い、一定値へ収束していく。

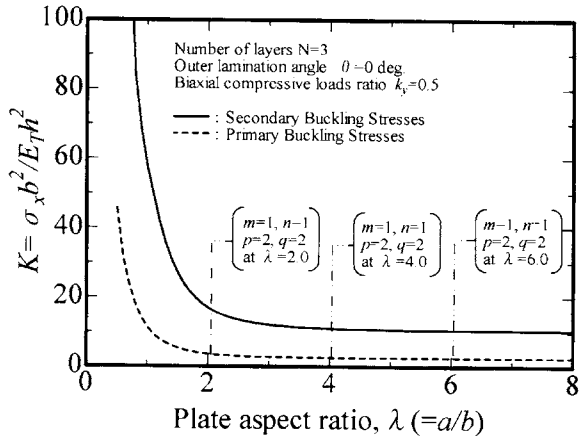
次に、積層構成の影響に着目すると、最外層積層角が 0deg. の場合、積層数  $N$  の増加とともに座屈値の座屈半波数は増加し、一方、最外層積層角が 90deg. の場合、積層数  $N$  の増加とともに座屈値の座屈半波数は減少していく。なお、一次座屈値と二次座



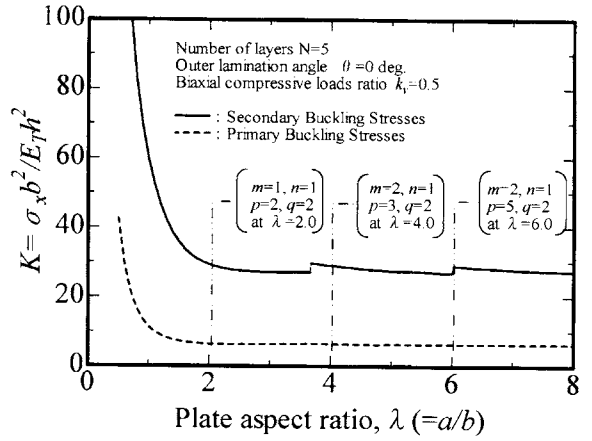
(a)  $N=3, k_y=0.0$



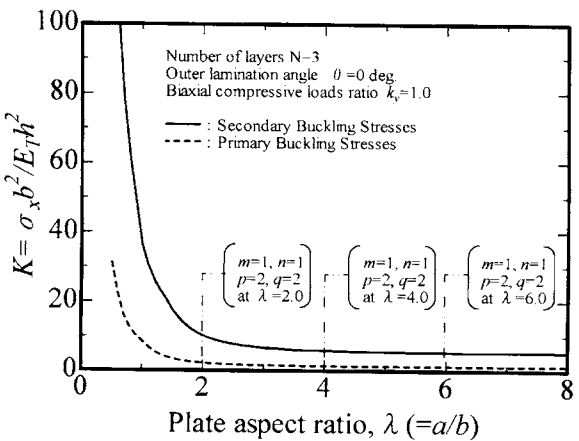
(d)  $N=5, k_y=0.0$



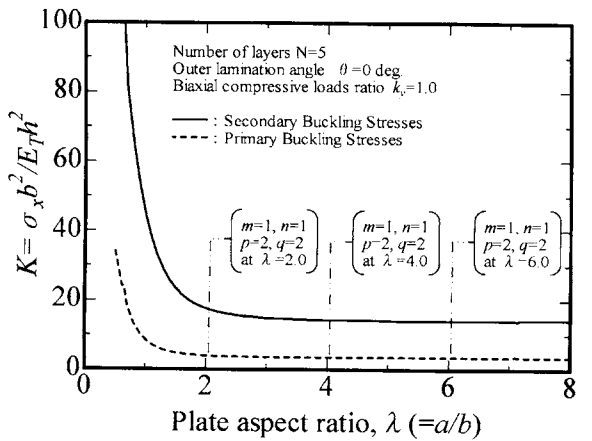
(b)  $N=3, k_y=0.5$



(c)  $N=5, k_y=0.5$

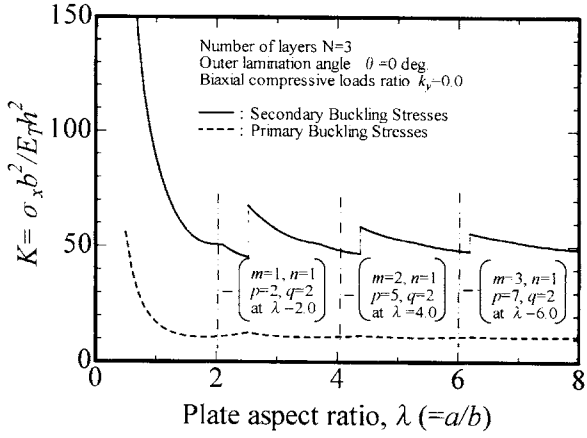


(e)  $N=3, k_y=1.0$

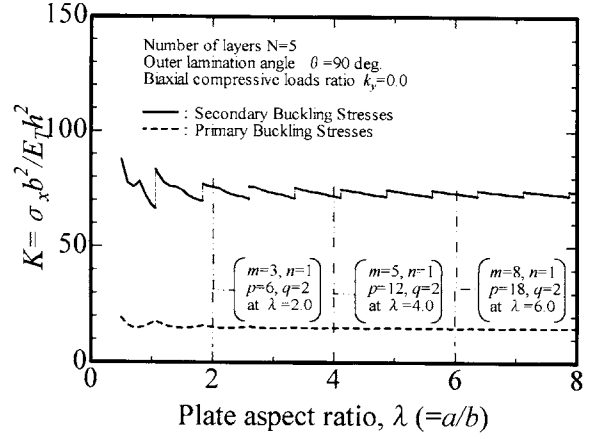


(f)  $N=5, k_y=1.0$

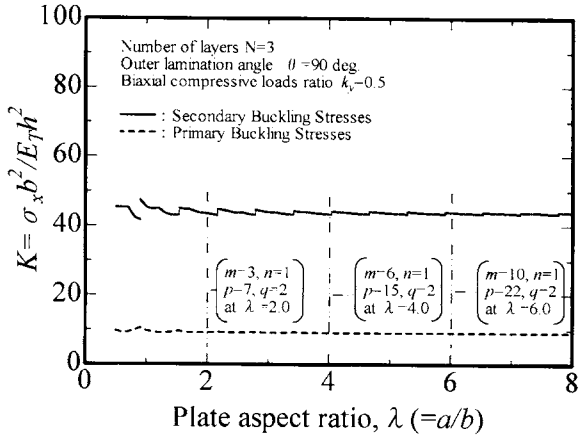
Fig.2 Relationship buckling stresses and plate aspect ratio  $\lambda (=a/b)$  at outer lamination angle  $\theta = 0$  deg..



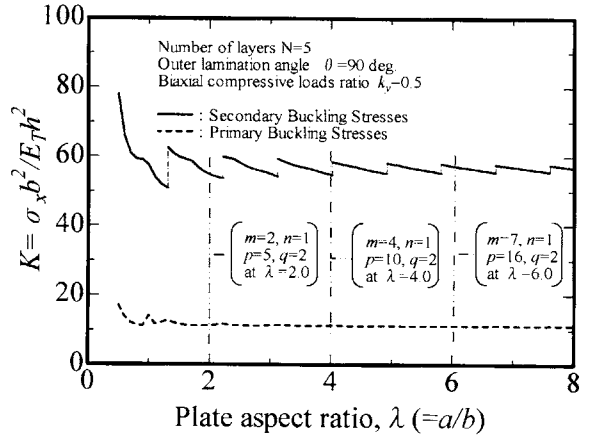
(a)  $N=3, k_y=0.0$



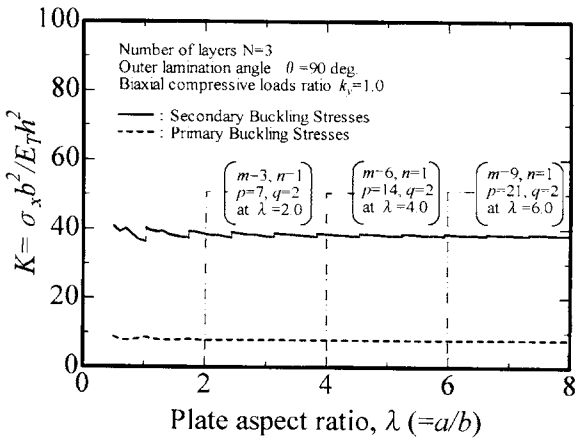
(d)  $N=5, k_y=0.0$



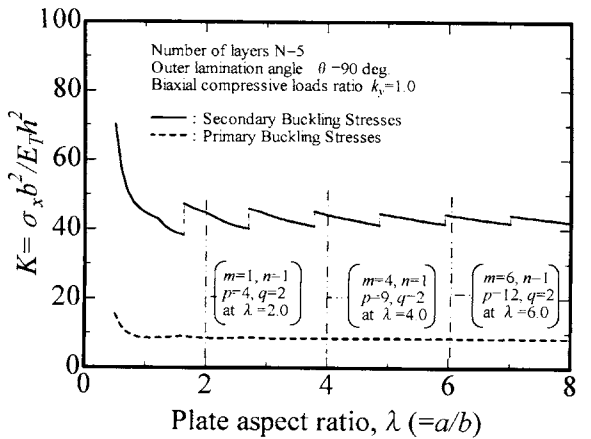
(b)  $N=3, k_y=0.5$



(e)  $N=5, k_y=0.5$

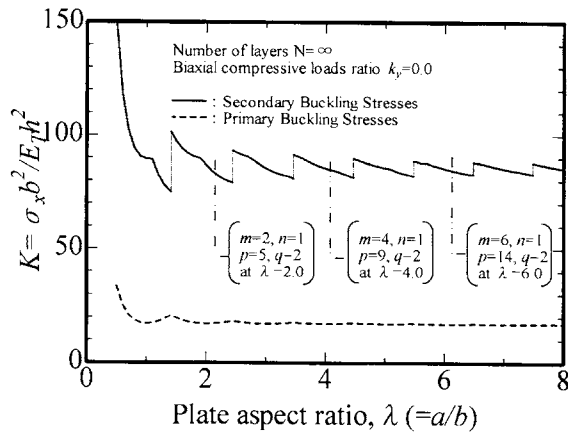


(c)  $N=3, k_y=1.0$

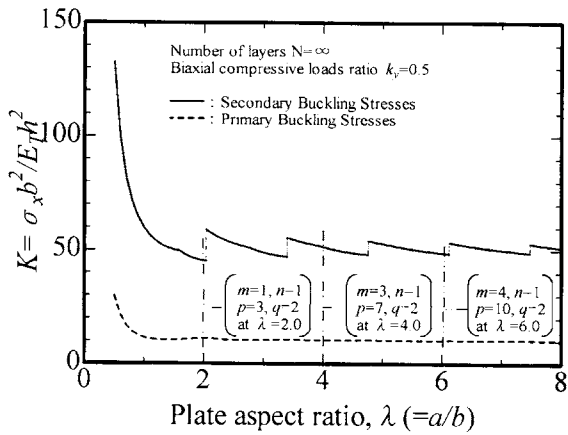


(f)  $N=5, k_y=1.0$

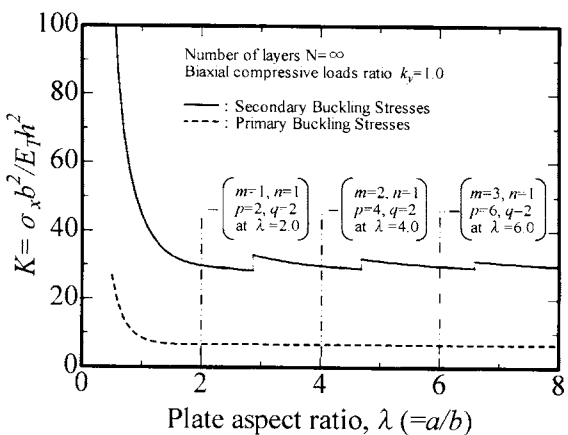
Fig.3 Relationship buckling stresses and plate aspect ratio  $\lambda (=a/b)$  at outer lamination angle  $\theta=90$  deg..



(a)  $k_y=0.0$



(b)  $k_y=0.5$



(c)  $k_y=1.0$

Fig.4 Relationship buckling stresses and plate aspect ratio  $\lambda (=a/b)$  at number of layers  $N=\infty$ .

屈値の座屈半波数の増加は定性的に一致している。最小となる二次座屈値について考察してみる。  $k_y=0.0$  の一軸圧縮負荷状態について着目すると、Fig.2, 3 の(a), (d)および Fig.4 の(a)に示しているが、一次座屈値の  $x$  軸方向半波数  $m$  が  $m=1$  の臨界アスペクト比において二次座屈値が最小となっていることが明らかである。この最小値となる二次座屈値の特性は等方性材料の矩形板の二次座屈値<sup>4)</sup>と一致しており、本論文においてクロスプライ積層矩形板でも同じ特性であることを理論的に明らかにしたことである。

### 5. 結 言

本論文では、二軸圧縮負荷を受ける対称クロスプライ積層矩形板の二次座屈現象について、全ポテンシャルエネルギーの第二変分により安定判別法を用いることにより示した。

特に板のアスペクト比が対称クロスプライ積層矩形板の二次座屈値に与える影響について解析的に明らかにし、一軸圧縮負荷条件では一次座屈時の臨界アスペクト比で最小の二次座屈値が生じることを明らかにし、さらにアスペクト比の増加により、二次座屈値が収束することを解析的に示した。

#### 参考文献

- 1) 植村益次, 他3名: FRP 構造強度計算の実際, 強化プラスチック協会(1984), 210.
- 2) 邊吾一, 植村益次: 一軸圧縮を受ける薄板の二次座屈現象の研究, 日本機械学会論文集, Vol.43(1977), No.372, 2818.
- 3) 平田隆教: 有限要素法による矩形板の二次座屈解析, 日本航空宇宙学会誌, Vol.25(1977), No.277,24.
- 4) T. Nakamura and K. Uetani: The secondary buckling and post-secondary buckling behavior of rectangular plates, Int. J Mech. Sci. No.21 (1979), 265.
- 5) 矢尾哲也, 他4名: 面内圧縮荷重を受ける矩形板の2次座屈に伴う飛び移り現象について, 日本造船学会論文集, No.190 (2001), 739.
- 6) H. Kasuya and S. Tsunoi: Buckling Strength of Cross-ply Laminated Plates under Biaxial Compression, Mater. Sci. Res. Int., Vol.2, No.2 (1996), 99.
- 7) 福永久雄: 積層板の圧縮座屈特性と最適化, 日本航空宇宙学会誌, Vol.30(1982), No.343, 46.
- 8) 林 毅 (編): 複合材料工学, 日科技連出版(1971), 802.
- 9) R.M. Jones: "Mechanics of Composite Materials", Chap.4, McGraw-Hill, New York (1975).
- 10) 植村益次, 山田直樹: 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24(1975), No.257, 156.