

二軸圧縮荷重を受ける擬似等方性積層板の座屈後解析

根本圭一*¹ 遠藤 翔*² 菊川久夫*³ 粕谷平和*⁴

Post-Buckling Analysis of Quasi-Isotropic Laminated Plates Subjected to Biaxial Compressive Loads by

Keiichi NEMOTO*¹, Sho ENDO*², Hisao KIKUGAWA*³ and Hirakazu KASUYA*⁴

(Received on Mar. 31, 2010 and accepted on May 19, 2010)

Abstract

Advanced composite materials represented by carbon fiber reinforced plastic (CFRP) has been increasingly used in wide a range of industrial applications because they have excellent properties such as high specific strength and specific stiffness. Postbuckling behaviors of thin laminated plates under uniaxial compression have been discussed by many researchers. However, little research has been performed on the secondary buckling phenomenon for thin laminated plate which occurs with further increase of load. In this paper, the stability condition of carbon-epoxy quasi-isotropic laminated plates under biaxial compressive loads which are simply supported along four edges is determined, using the second variation of total potential energy. The necessity of secondary buckling is proven analytically, and the effects of various factors, such as lamination constitution and biaxial compressive ratio, are clarified.

Keywords: Structural analysis, Composite materials, CFRP, Secondary buckling, Quasi-isotropic, Biaxial compressive ratio

1. まえがき

近年、構造物の軽量化、高速化にともない、比強度、比剛性の高い繊維強化プラスチック材、特に炭素繊維からなる高性能繊維強化プラスチック材は、薄肉軽量構造材として、航空宇宙をはじめとする各分野で数多く使用されている。このように、構造物が薄肉軽量化される場合には、座屈が構造設計基準として用いられるため、その挙動を解明することは重要であると考えられ、積層構成によっては面内変形と面外変形が連成するカップリング効果が発生し、座屈荷重¹⁾や固有振動数²⁾を低下させる原因となるため、できる限りカップリング項が少なくなる積層構成が選ばれている。そのため、通常、対称バランスト積層が用いられていることが多い。

二軸圧縮荷重を受ける積層薄板は座屈後も荷重低下がなく耐荷能力があるため、一次座屈後も使用することが可能である^{3, 4)}。しかしながら、一次座屈後さらに荷重を加えても、いつまでも安定状態が続くわけではなく、ある荷重において不安定となり、耐荷剛性がさらに低下する二次座屈現象が起こる^{5~7)}。

著者らは前報⁸⁾において、対称バランスト積層構造の中で面内剛性の特性が等方性となる擬似等方性積層板に

着目し、一軸圧縮荷重を受ける二次座屈現象について、二次座屈値に与える積層構成の影響等を論理的に考察し、明らかにした。

本論文では前報⁸⁾の理論を応用し、面外剛性も等方性となる擬似等方性正方形板⁹⁾を例にとり、二軸圧縮荷重を受ける二次座屈現象の必然性を全ポテンシャルエネルギーの第2変分値により一次座屈後の平衡状態の安定判別を行う方法を用いて明らかにする。また、二次座屈現象に与える諸因子、特に二軸圧縮荷重比が二次座屈値に与える影響を解析的手法によって検討する。

2. 座屈解析法

2. 1 擬似等方性積層板の基礎式

Fig.1に示すような板幅 a 、 b 板厚 h の積層板の一隅を座標原点とし、辺に沿って x 、 y 軸、板厚方向に z 軸をとり、圧縮荷重 \bar{N}_x 、 \bar{N}_y を受ける場合を考え、中央面の変位を u 、 v 、 w とする。面内ひずみ ϵ_x 、 ϵ_y 、 γ_{xy} 、曲率成分 κ_x 、 κ_y 、 κ_{xy} と変位 u 、 v 、 w との関係は座屈後の安定問題を解析するために、二次の微小項を考慮した有限変形理論を用いると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

*1: 横浜ゴム株式会社 航空部品技術部

*2: 工学研究科機械工学専攻修士課程

*3: 工学部医用生体工学科 准教授

*4: 工学部動力機械工学科 教授

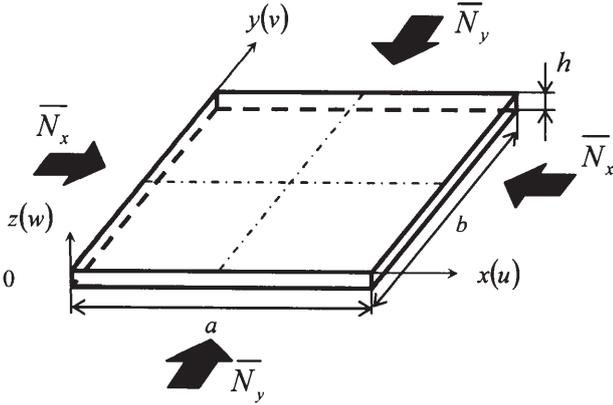


Fig.1 Configuration and coordinates of quasi-isotropic laminated plate under bi-axial compressive loads.

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

また、面内ひずみ成分 ε_x , ε_y , γ_{xy} と平面応力成分 σ_x , σ_y , τ_{xy} との関係は、弾性域に限定すると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x / E - \nu \sigma_y / E \\ \varepsilon_y &= \sigma_y / E - \nu \sigma_x / E \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで、本論文では擬似等方性積層板を扱っているため、縦弾性係数を E ($E_x = E_y$)、せん断弾性係数を G (G_{xy})、さらにポアソン比を ν ($\nu_x = \nu_y$) と整理することができる。板厚 h であるときの単位幅当りの面内力 N_x , N_y , N_{xy} は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \nu \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \nu \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \right] \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = Gh \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

また、本解析モデルにおいては中央面に対して、対称バランスされた積層を考えているので、その時の合応力成分と面内ひずみ成分、合モーメント成分と曲率成分との関係は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性マトリックス、 D_{ij} は曲げ剛性マトリックスであり、それぞれ、異方性材の繊維方向、繊維に直角方向の縦弾性係数 E_L , E_T 、ポアソン比 ν_L , ν_T 、せん断弾性係数 G_{LT} および積層角 θ が与えられると求められる¹⁰⁾。

ただし、曲げ-ねじりカップリング剛性項 D_{16} , D_{26} を考慮した薄板の座屈後解析は非常に困難であり、この曲げ-ねじりカップリング剛性項が座屈強度に与える影響は無次元異方性パラメータ γ , δ を用いて評価することができる¹¹⁾。

$$\gamma = \frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11}^3 D_{22}}}, \quad \delta = \frac{D_{26}}{\sqrt{D_{11} D_{22}^3}} \quad (6)$$

そして、 γ , δ の値がそれぞれ 0.2 より小さい積層板では曲げ-ねじりカップリング効果は無視できる¹¹⁾。よって、本論文では γ , δ の値が共に 0.2 以下の積層構成について取り扱う。

圧縮荷重を受ける擬似等方性積層板の面内変形エネルギー、曲げエネルギーをそれぞれ U_m , U_b とすると

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \\ U_b &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

であり、変位により圧縮荷重を受ける場合の全ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = U_m + U_b \quad (8)$$

である。式(8)に式(3), (5)および(7)を代入すると、

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[\frac{1}{h} \left\{ \frac{N_x^2}{E} - \frac{2\nu}{E} N_x N_y + \frac{N_y^2}{E} + \frac{N_{xy}^2}{G} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

2.2 平衡方程式と適合方程式

擬似等方性積層板の面内および板厚方向の平衡方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、面内平衡方程式(10)を満足するように、応力関数 F を次式のように定義する。

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

上式の応力関数 F を用いると板厚方向の平衡方程式は次式となる。

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = h \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \quad (13)$$

一方、適合方程式は式(1)から u , v を消去すると、

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (14)$$

となり、さらに応力関数を用いて示すと次式のようになる。

$$H_{11} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + 2(H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \quad (15)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= A_{11} A_{66} / H, & H_{12} &= -A_{12} A_{66} / H \\ H_{66} &= (A_{11}^2 - A_{12}^2) / H, & H &= A_{11}^2 A_{66} - A_{12}^2 A_{66} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

である。また、 x 軸方向における板の中央面での平均軸縮み ε_{mx} は次式で表される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{mx} &= -\frac{1}{a} \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ &= -\frac{1}{a} \int_0^a \left\{ h H_{11} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + h H_{12} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \end{aligned} \quad (17)$$

これより、後述する平均軸圧縮応力 σ_x ($= \bar{N}_x / h$) との関係が得られる。

3. 一次座屈後の挙動解析

3. 1 一次座屈後の挙動

一次座屈後の挙動解析では、一次座屈後の平衡方程式と適合方程式の応力関数 F とたわみ w の連立偏微分方程式を解けばよいが、非線形問題であり厳密解を得ることは困難である。

したがって、まず、板厚方向の面外境界条件を満足するようにたわみ波形 w を仮定し、次に面内境界条件を満足する応力関数 F を求め、Galerkin 法を用いることにより、近似解を得る。

面内ひずみ成分 ε_x , ε_y , γ_{xy} と平面応力成分 N_x , N_y , N_{xy} との関係は、式(3)より次式が与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= H_{11} N_x + H_{12} N_y \\ \varepsilon_y &= H_{12} N_x + H_{11} N_y \\ \gamma_{xy} &= H_{66} N_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

周辺単純支持の場合、一次座屈後の板厚方向の面外境

界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, & \quad a \text{ で } w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y=0, & \quad b \text{ で } w = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

であり、面内境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, & \quad a \text{ で } u \text{ は } y \text{ 軸に沿って一定で} \\ & \quad \int_0^b N_x dy = -\bar{N}_x b, N_{xy} = 0 \\ y=0, & \quad b \text{ で } v \text{ は } x \text{ 軸に沿って一定で} \\ & \quad \int_0^a N_y dx = -\bar{N}_y a, N_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

である。

板厚方向の面外境界条件を満足するように、一次座屈後のたわみ波形 w を次式のように近似表示する。

$$w = w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (21)$$

ここで、 m , n はそれぞれ一次座屈時の x , y 方向の座屈半波数である。

上式を式(15)の適合方程式へ代入し、面内境界条件を満足する応力関数 F を求めると、

$$F = \frac{w_{mn}^2}{32h} \left\{ \frac{1}{H_{11}} \left(\frac{an}{mb} \right)^2 \cos \frac{2m\pi x}{a} + \frac{1}{H_{11}} \left(\frac{mb}{an} \right)^2 \cos \frac{2n\pi y}{b} \right\} - \frac{\sigma_x y^2}{2} - \frac{\sigma_y x^2}{2} \quad (22)$$

となる。上式を面外平衡方程式へ代入し、Galerkin 法を適用することにより次式のような w_{mn} に関する三次方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\pi w_{mn}}{4\lambda} \\ & \times \left[\frac{1}{h} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left\{ D_{11} \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})n^2 + D_{22}n^4 \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{w_{mn}^2}{16h} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left\{ \frac{1}{H_{11}} \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + \frac{n^4}{H_{11}} \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2 \right\} - \sigma_x \left\{ 1 + k_y \lambda^2 \left(\frac{n}{m} \right)^2 \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 λ ($= a/b$) は平板のアスペクト比、 k_y ($= N_y / N_x$) は二軸圧縮荷重比である。また、上式より σ_x と w_{mn} の関係が得られる。

3. 2 一次座屈後の安定判別

座屈後の平衡状態の安定判別は、変位成分に関する第二変分の正負から議論できる。

第二変分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{h} \left\{ \frac{\delta N_x^2}{E} + \frac{\delta N_y^2}{E} - \frac{2\nu}{E} \delta N_x \delta N_y + \frac{\delta N_{xy}^2}{G} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ N_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \end{aligned} \quad (24)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \delta N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} \\ \delta N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right\} \\ \delta N_{xy} &= Gh \left(\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

である. 式(24)において, $\delta^2\Pi > 0$ なら安定となり, $\delta^2\Pi = 0$ なら中立平衡, $\delta^2\Pi < 0$ なら不安定である. ここで仮想変位の想定は, $\delta^2\Pi$ の絶対的な正負の判定に関係する. よって, 適切な仮想変位を想定する方法として, 第二変分 $\delta^2\Pi$ の仮想変位成分について極値を求める必要がある. 仮想変位に関する境界条件の下に $\delta^2\Pi$ を x , y , z 方向のそれぞれの微小擾乱仮想変位 δu , δv , δw について変分し, 次式のような平衡方程式を得る.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \delta M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_y}{\partial y^2} \\ &+ \delta N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 \delta N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \delta N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &+ N_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

一次座屈後の面内平衡方程式を満足させる仮想応力関数 δF を導入し, 次式のように定義する.

$$\delta N_x = h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial y^2}, \quad \delta N_y = h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2}, \quad \delta N_{xy} = -h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x \partial y} \quad (28)$$

さらに, 一次座屈後の面外平衡方程式へ代入し, δu , δv を消去すると仮想変位に対する適合方程式を得る.

$$\begin{aligned} &H_{11} \frac{\partial^4 \delta F}{\partial x^4} + (2H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 \delta F}{\partial x^2 \partial y^2} + H_{11} \frac{\partial^4 \delta F}{\partial y^4} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

微小擾乱仮想変位および仮想面内力が満足すべき境界条件は次式で表される.

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad a \quad \delta w=0, \quad \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}=0, \quad \delta u=0, \quad \delta N_{xy}=0 \\ y=0, \quad b \quad \delta w=0, \quad \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}=0, \quad \delta v=0, \quad \delta N_{xy}=0 \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

また, 境界条件を満足するように, 微小擾乱仮想変位 δw を次式のように定義する. ここで, p , q は一次座屈後の不安定現象が起こった場合の x , y 方向の微小擾乱半波数である.

$$\delta w = \delta w_{pq} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (31)$$

適合方程式(29)に, 式(21), (31)の w , δw を代入し, 面内境界条件(26)を満足するように仮想応力関数 δF を求める.

$$\delta F = \frac{\lambda^2}{4h} w_{mn} \delta w_{pq} \left[\begin{aligned} &\frac{(pn-qm)^4 \cos\left\{\frac{(p-m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q-n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ &- \frac{(pn-qm)^4 \cos\left\{\frac{(p+m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q+n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \\ &+ \frac{(pn+qm)^4 \cos\left\{\frac{(p+m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q-n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ &+ \frac{(pn+qm)^4 \cos\left\{\frac{(p-m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q+n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \end{aligned} \right] \quad (32)$$

ここで, 式(12)と式(22)より N_x , N_y , N_{xy} を求め, さらに式(28)と式(32)より δN_x , δN_y , δN_{xy} を求める. これらを式(21)の w , 式(31)の δw を式(24)の第二変分 $\delta^2\Pi$ に代入し, 二重積分すると安定判別式として次式を得る.

$$\begin{aligned} \delta^2\Pi &= \delta w_{pq}^2 \left[\frac{\lambda \pi^4 w_{mn}^2}{128b^2 h} \right. \\ &\times \left\{ \frac{(pn-qm)^4 \delta \delta_p \delta \delta_q}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \right. \\ &- \frac{(pn-qm)^4}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \\ &+ \frac{(pn+qm)^4 \delta \delta_q}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ &+ \frac{(pn+qm)^4 \delta \delta_p}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \left. \right\} \\ &+ \frac{\pi^4 w_{mn}^2}{128b^2 h} \left\{ \frac{m^2 p^2}{H_{11} \lambda^3} \delta_p + \frac{n^2 q^2}{H_{11}} \lambda \delta_q \right\} - \sigma_x \left\{ \frac{(p\pi)^2}{8\lambda} h + k_y \frac{(q\pi)^2}{8} \lambda h \right\} \\ &+ \frac{1}{8} \frac{(p\pi)^4}{b^2 \lambda^2} \left\{ D_{11} + 2\lambda^2 \left(\frac{q}{p}\right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \lambda^4 D_{22} \left(\frac{q}{p}\right)^4 \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \delta \delta_p &= 2 \quad (p=m \text{ の時}) & \delta \delta_q &= 2 \quad (q=n \text{ の時}) \\ &= 1 \quad (p \neq m \text{ の時}) & &= 1 \quad (q \neq n \text{ の時}) \\ \delta_p &= 1 \quad (p=m \text{ の時}) & \delta_q &= 1 \quad (q=n \text{ の時}) \\ &= 0 \quad (p \neq m \text{ の時}) & &= 0 \quad (q \neq n \text{ の時}) \end{aligned}$$

これより, p , q を変化させることにより安定判別を行う.

4. 数値計算例と解析結果の検討

炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材の擬似等方性積層板について数値計算を実行した. その基本弾性定数(繊維容積含有率 $V_f = 60\%$)は, 平均化近似解法により計算され, 実験でも確認された値である¹²⁾.

$$\left. \begin{aligned} E_L &= 137(\text{GPa}), \quad E_T = 8.17(\text{GPa}), \quad G_{LT} = 4.75(\text{GPa}) \\ \nu_L &= 0.316, \quad \nu_T = 0.0189 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

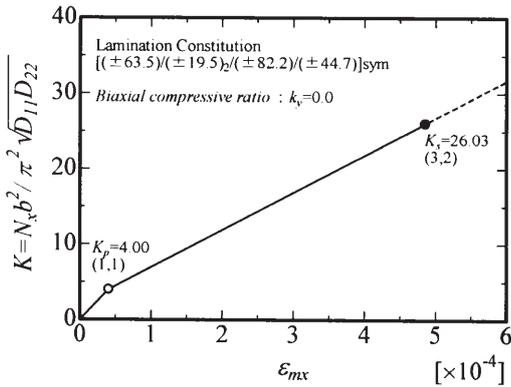
数値計算として、面内剛性および面外剛性が等方性となる擬似等方性積層板を扱い、その積層構成の例として $[(\pm 63.5)/(\pm 19.5)_2/(\pm 82.2)/(\pm 44.7)]_{\text{sym}}$ を適用した⁹⁾。無次元平均軸圧縮応力 $K (=N_x b^2 / \pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}})$ と x 軸方向の無次元平均軸縮み ε_{mx} の関係を Fig.1 に示し、さらに、無次元平均軸圧縮応力 K と擬似等方性積層板の中央点でのたわみ w_{mn}/a の関係を Fig.3 に示す。そして、板のアスペクト比 $\lambda (=a/b) = 1.0$ と固定し、二軸圧縮荷重比 k_y を 0.0, 0.5, 1.0 と変化させ、その影響を見るために各図(a)~(c)にそれぞれ示す。

また、二軸圧縮荷重比 k_y の影響を見るために二軸圧縮荷重比 k_y を 0~1.0 まで 0.1 刻みに変化させ、その時の一

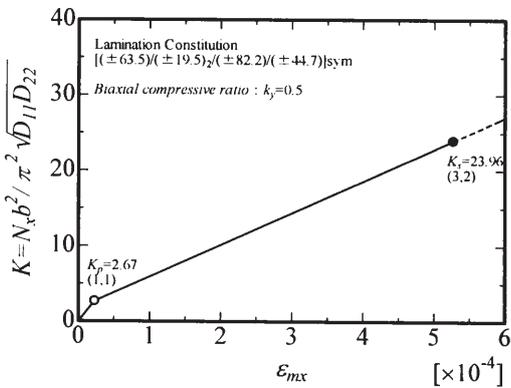
次座屈値および二次座屈値の挙動を Fig.4 に示す。

なお、Fig.2~4 において K_p は一次座屈値、 K_s は二次座屈値を表し、括弧内の数値は座屈時の x および y 方向の半波数である。例えば、二次座屈時が(3,2)と示しているものは $p=3, q=2$ を意味する。ここで、一次座屈後の座屈値 K と x 軸方向の平均軸縮み ε_{mx} との関係は式(17)で表すことができ、二次座屈値までは実線で示し、二次座屈後の挙動については明らかでないため、式(17)で計算される延長線を破線で示す。

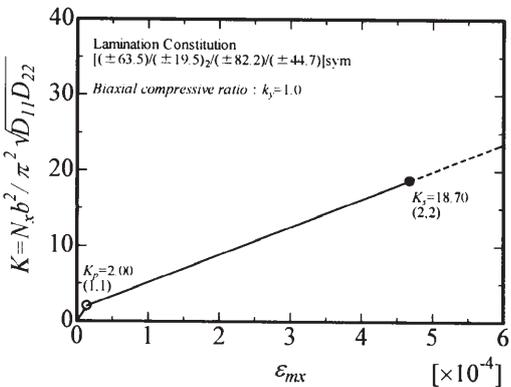
Fig.2 および Fig.3 の結果から、二軸圧縮荷重比 k_y の増加に伴い、座屈値は減少していく。 $k_y=0.0$ から 1.0 へ変化することで一次座屈値 K_p は 50% の低下を示し、一方、



(a) $k_y=0.0$

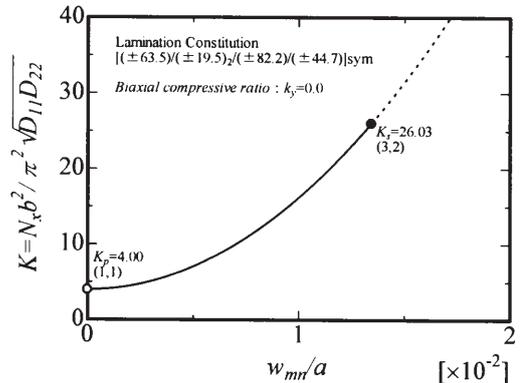


(b) $k_y=0.5$

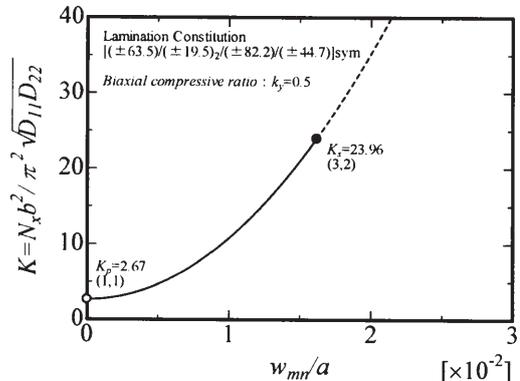


(c) $k_y=1.0$

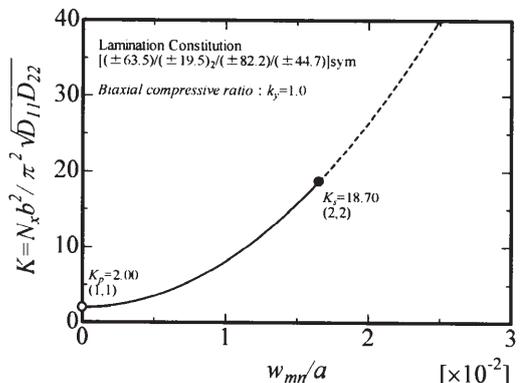
Fig.2 Variation of average axial compression K versus average x directional axial strain ε_{mx} .



(a) $k_y=0.0$



(b) $k_y=0.5$



(c) $k_y=1.0$

Fig.3 Variation of average axial compression K versus deflection at center of plate w_{mn}/a .

5. あとがき

本論文では、二軸圧縮荷重を受ける擬似等方性積層板の二次座屈現象について、全ポテンシャルエネルギーの第二変分により安定判別法を用いることにより示した。

特に二軸圧縮荷重比が面内および面外剛性ともに等方性となる擬似等方性積層板に着目し、二次座屈値に与える影響について解析的に明らかにし、二軸圧縮荷重の増加に伴い、一次座屈値および二次座屈値が共に減少し、完全な二軸圧縮状態 ($k_y=1.0$)の条件では一軸圧縮荷重時と比較すると一次座屈値は50%、二次座屈値は29%低減することを解析的に明らかに示した。

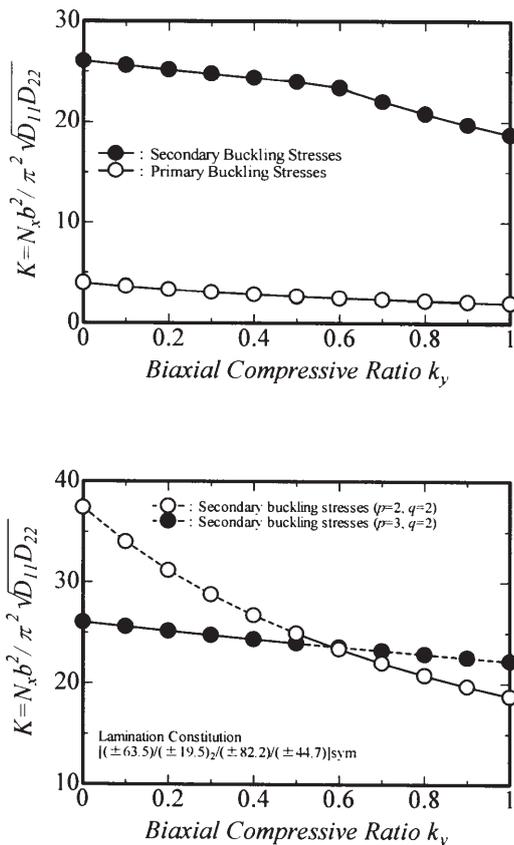


Fig.4 Relationship K and biaxial compressive ratio at quasi laminated plates, [(±63.5)/(±19.5)₂/(±82.2)/(±44.7)]sym.

二次座屈値は29%の低下を示している。

Fig.4 の上段に二軸圧縮荷重比 k_y の増加に対する一次座屈値と二次座屈値の変化を示し、二次座屈値を“●”，一次座屈値を“○”で示す. 下段には微小擾乱半波数 $p=2$, $q=2$ の二次座屈値 K の挙動を“○”， $p=3$, $q=2$ の二次座屈値 K の挙動を“●”で示す. 本解析結果より、二軸圧縮荷重比 k_y の増加により、 $k_y \approx 0.6$ 近傍で最小の二次座屈値となる x 軸方向の微小擾乱半波数が $p=3$ から $q=2$ へ変化していることが判る. このことより、二軸圧縮荷重比 k_y が二次座屈荷重へ大きく影響を与えているとともに、二次座屈を得る微小擾乱半波数 p にも影響を与えていることを理論的に明らかにすることが出来た.

また、本論文では紙面の都合上、面内剛性および面外剛性が共に等方性となる擬似等方性の積層構成の代表例を取り上げたが、既報⁸⁾の解析の中で示した面内剛性および面外剛性が共に等方性となる積層構成⁹⁾に関しても、二軸圧縮荷重を受ける擬似等方性積層板の座屈後の特性、すなわち二次座屈値は本解析結果と同一の解析結果を得ていることを付け加えておく.

参考文献

- 1) 粕谷平和, 康井義明: 積層複合薄板の一軸圧縮座屈に及ぼすカップリング効果, 東海大学紀要工学部, 1982 (1), 181.
- 2) 粕谷平和: 積層複合円筒殻の振動特性に及ぼす積層構成効果, 東海大学紀要工学部, Vol.26, No.2 (1987), 89.
- 3) 粕谷平和: 二軸圧縮を受けるクロスプライ積層板の座屈後の挙動, 東海大学紀要工学部, Vol.29, No.2 (1990), 107.
- 4) K.Nemoto, H.Kasuya, H.Kikugawa and T.Asaka: Post Buckling Behavior of Composite Laminated Plates with Initial Imperfections under Biaxial Compression, *Materials Transaction*, Vol.50, No.2 (2009), 299.
- 5) H. Kasuya and S. Tsunoi: Buckling Strength of Cross-ply Laminated Plates under Biaxial Compression, *Materials Science Research International*, Vol.2, No.2 (1996), 99.
- 6) 粕谷平和, 根本圭一, 辻本真之: 二軸圧縮荷重を受けるアングルプライ積層矩形板の座屈強度, 設計工学, Vol.43, No.10 (2008), 52.
- 7) 根本圭一, 遠藤翔, 山口斉, 菊川久夫, 粕谷平和: 二軸圧縮荷重を受けるクロスプライ積層矩形板の二次座屈強度, 東海大学紀要工学部, Vol.49, No.1 (2009), 93.
- 8) 根本圭一, 遠藤翔, 山口斉, 菊川久夫, 粕谷平和: 面内圧縮荷重を受ける擬似等方性積層板の二次座屈現象に関する理論的考察, 東海大学紀要工学部, Vol.49, No.2 (2010), 95.
- 9) 福永久雄: 積層材の積層パラメータから積層構成を決定する方法について, 日本複合材料学会誌, Vol.13, No.3 (1987), 107.
- 10) R.M. Jones: “Mechanics of Composite Materials”, Chap.4, McGraw-Hill, New York (1975).
- 11) Michael P.Nemeth, Importance of Anisotropy on Buckling of Compression-Loaded Symmetric Composite Plates, *AIAA Journal*, Vol.24, No.11(1986), 1831.
- 12) 植村益次, 山田直樹: 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24, No.257(1975), 156.