

初期たわみを有する擬似等方性積層板の二次座屈解析

根本 圭一*¹ 遠藤 翔*² 西岡 宙士*² 菊川 久夫*³ 粕谷 平和*⁴

Secondary Buckling Analysis of Quasi-Isotropic Laminated Plates with Initial Deflections

by

Keiichi NEMOTO*¹, Sho ENDO*², Hiroshi NISHIOKA*², Hisao KIKUGAWA*³
and Hirakazu KASUYA*⁴

(Received on Sep. 30, 2010 and accepted on Nov. 17, 2010)

Abstract

Advanced composite materials represented by carbon fiber reinforced plastic (CFRP) has been increasingly used in wide a range of industrial applications because they have excellent properties such as high specific strength and specific stiffness. Postbuckling behaviors of thin laminated plates under uniaxial compression have been discussed by many researchers. However, little research has been performed on the secondary buckling phenomenon for thin laminated plate which occurs with further increase of load. In this paper, the stability condition of carbon-epoxy quasi-isotropic laminated plates with initial deflection under axial compression which are simply supported along four edges is determined, using the second variation of total potential energy. The necessity of secondary buckling is proven analytically, and the effects of various factors, such as lamination constitution and initial deflection, are clarified.

Keywords: Structural analysis, Composite materials, CFRP, Secondary buckling, Quasi-isotropic, Initial deflection

1. まえがき

近年、構造物の軽量化、高速化にともない、比強度、比剛性の高い繊維強化プラスチック材、特に炭素繊維からなる高性能繊維強化プラスチック材は、薄肉軽量構造材として、航空宇宙をはじめとする各分野で数多く使用されている。このように、構造物が薄肉軽量化される場合には、座屈が構造設計基準として用いられるため、その挙動を解明することは極めて重要であると考えられ、積層構成によっては面内変形と面外変形が連成するカップリング効果が発生し、圧縮座屈荷重¹⁾や固有振動数²⁾を低下させる原因となるため、できる限りカップリング項が少なくなる積層構成が選ばれている。そのため、通常、対称バランスト積層が用いられていることが多い。

面内圧縮荷重を受ける複合材料積層薄板は座屈後も荷重低下がなく耐荷能力があるため、一次座屈後も使用することが可能である^{3),4)}。しかしながら、一次座屈後さらに荷重を加えても、いつまでも安定状態が続くわけではなく、ある荷重において不安定となり、耐荷剛性がさらに低下する二次座屈現象が起こる⁵⁾⁻⁷⁾。

著者らは前報^{8),9)}において、対称バランスト積層構造

の中で面内剛性の特性が等方性となる擬似等方性積層板に着目し、面内圧縮荷重を受ける二次座屈現象について二次座屈値に与える積層構成の影響等を論理的に考察し、明らかにした。

本論文では前報^{8),9)}の理論を応用し、面外剛性も等方性となる擬似等方性積層正方形板⁹⁾を例にとり、初期たわみを有する擬似等方性積層板に面内圧縮荷重を負荷させた際の二次座屈現象の必然性を全ポテンシャルエネルギーの第2変分値により、一次座屈後の平衡状態の安定判別を行う方法を用いて明らかにする。また、二次座屈現象に与える諸因子、特に初期たわみが二次座屈値に与える影響を解析的手法によって検討する。

2. 座屈解析法

2.1 擬似等方性積層板の基礎式

Fig.1に示すような板幅 a , b , 板厚 h の積層板の一隅を座標原点とし、辺に沿って x , y 軸、板厚方向に z 軸をとり、圧縮荷重 \bar{N}_x を受ける場合を考え、中央面の変位を u , v , w とする。ここで、 w_0 を初期たわみと仮定すると、面内ひずみ ε_x , ε_y , γ_{xy} 、曲率成分 κ_x , κ_y , κ_{xy} と変位 u , v , w との関係は座屈後の安定問題を解析するために、二次の微小項を考慮した有限変形理論を用いると次式のように表される。

*1: 横浜ゴム株式会社 航空部品技術部

*2: 工学研究科機械工学専攻修士課程

*3: 工学部医用生体工学科 准教授

*4: 工学部動力機械工学科 教授

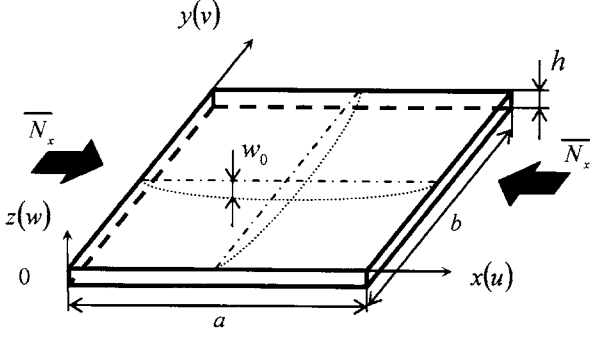


Fig.1 Configuration and coordinates of quasi-isotropic laminated plates with initial deflection.

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (2)$$

また、面内ひずみ成分 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ と平面応力成分 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ との関係は、弾性域に限定すると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x / E - \nu \sigma_y / E \\ \varepsilon_y &= \sigma_y / E - \nu \sigma_x / E \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで、本論文では擬似等方性積層板を扱っているため、縦弾性係数を E ($E_x = E_y$)、せん断弾性係数を G (G_{xy})、さらにポアソン比を ν ($\nu_x = \nu_y$) と整理することができる。板厚 h であるときの単位幅当りの面内力 N_x, N_y, N_{xy} は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \nu \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right\} \right] \\ N_y &= \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_y dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \nu \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right\} \right] \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} dz = Gh \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} \end{aligned} \right\} (4)$$

また、本解析モデルにおいては中央面に対して、対称バランスされた積層構成を考えているので、その時の合応力成分と面内ひずみ成分、合モーメント成分と曲率

成分との関係は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} (5)$$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性マトリックス、 D_{ij} は曲げ剛性マトリックスであり、それぞれ、異方性材の繊維方向、繊維に直角方向の縦弾性係数 E_L, E_T 、ポアソン比 ν_L, ν_T 、せん断弾性係数 G_{LT} および積層角 θ が与えられると求められる¹¹⁾。

ただし、曲げ-ねじりカップリング剛性項 D_{16}, D_{26} を考慮した薄板の座屈後解析は非常に困難であり、この曲げ-ねじりカップリング剛性項が座屈強度に与える影響は無次元異方性パラメータ γ, δ を用いて評価することができる¹²⁾。

$$\gamma = \frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11}^3 D_{22}}}, \quad \delta = \frac{D_{26}}{\sqrt{D_{11} D_{22}^3}} \quad (6)$$

そして、 γ, δ の値がそれぞれ 0.2 より小さい積層板では曲げ-ねじりカップリング効果は無視できる¹²⁾。よって、本論文では γ, δ の値が共に 0.2 以下の積層構成について取り扱う。

圧縮負荷を受ける擬似等方性積層板の面内変形エネルギー、曲げエネルギーをそれぞれ U_m, U_b とすると

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \\ U_b &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \end{aligned} \right\} (7)$$

であり、変位により圧縮負荷を受ける場合の全ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = U_m + U_b \quad (8)$$

である。式(8)に式(3)、(5)および(7)を代入すると、

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \left[\frac{1}{h} \left\{ \frac{N_x^2}{E} - \frac{2\nu}{E} N_x N_y + \frac{N_y^2}{E} + \frac{N_{xy}^2}{G} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

2. 2 平衡方程式と適合方程式

擬似等方性積層板の面内および板厚方向の平衡方程式は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} (10)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right\} + N_y \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right\} + N_{xy} \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} \quad (11)$$

ここで、面内平衡方程式(10)を満足するように、応力関数 F を次式のように定義する。

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

上式の応力関数 F を用いると板厚方向の平衡方程式は次式となる。

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = h \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} \quad (13)$$

一方、適合方程式は式(1)から u , v を消去すると、

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (14)$$

となり、さらに応力関数を用いて示すと次式のようになる。

$$H_{11} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + 2(H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \quad (15)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= A_{11} A_{66} / H, & H_{12} &= -A_{12} A_{66} / H \\ H_{66} &= (A_{11}^2 - A_{12}^2) / H, & H &= A_{11}^2 A_{66} - A_{12}^2 A_{66} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

である。

結局、一次座屈後の挙動解析では、一次座屈後の平衡方程式と適合方程式の応力関数とたわみ波形に関する連立偏微分方程式を与えられた境界条件の下で解けばよいが、厳密解を得ることは極めて難しいので、以下近似的に解くことにする。

3. 一次座屈後の挙動解析

3.1 一次座屈後の挙動

周辺単純支持の場合、一次座屈後の板厚方向の面外境

界条件は式(17)で示される。

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x = 0, a \\ w &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at } y = 0, b \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

面内境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, a \text{ で } u \text{ は } y \text{ 軸に沿って一定で} \\ \int_0^b N_x dy &= -\bar{N}_x b, N_{xy} = 0 \\ y &= 0, b \text{ で } v \text{ は } x \text{ 軸に沿って一定で} \\ \int_0^a N_y dx &= 0, N_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

である。

板厚方向の面外境界条件を満足するように、一次座屈後のたわみ波形 w , 初期たわみ w_0 を板の中央点について対称および逆対称モードの2項近似表示する。

$$\left. \begin{aligned} w &= w_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) + w_{21} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \\ w_0 &= c_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) + c_{21} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 c_{11} , c_{21} は初期たわみの大きさを表している。上式を式(15)の適合方程式へ代入し、面内境界条件を満足する応力関数 F を求めると、

$$F = \frac{1}{2h\lambda^2} (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11}) \left\{ \frac{\lambda^4}{16H_{11}} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16H_{11}} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right\} + \frac{2}{h\lambda^2} (w_{21}^2 + 2w_{21}c_{21}) \left\{ \frac{\lambda^4}{256H_{11}} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16H_{11}} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right\} - \frac{1}{4h\lambda^2} (w_{11}w_{21} + w_{11}c_{21} + w_{21}c_{11}) \left[\frac{\lambda^4}{H_{11}} \left\{ \frac{1}{9} \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right\} - \frac{\lambda^4 \cos(3\pi x/a) \cos(2\pi y/b)}{81H_{11} + 36(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} + \frac{\lambda^4 9 \cos(\pi x/a) \cos(2\pi y/b)}{H_{11} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \right] - \frac{\sigma_x y^2}{2} \quad (20)$$

ここで、 $\lambda (=a/b)$ は平板のアスペクト比である。さらに、板厚方向の平衡方程式(13)へ代入し、Galerkin法を適用すると、応力とたわみに関する三次元方程式が得られ、Newton-Raphson法を適用することで w_{11} , w_{21} がそれぞれ求められる。また、擬似等方性積層板の中央面での x 軸方向の平均軸縮み ε_x は、

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{mx} &= -\frac{1}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \\
 &= -\frac{1}{a} \int_0^a \left\{ \varepsilon_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right\} dx \\
 &= H_{11} \sigma_x h + \frac{\pi^2}{8a^2} (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11} + 4w_{21}^2 + 8w_{21}c_{21}) \quad (21)
 \end{aligned}$$

で与えられ、平均軸圧縮応力 σ_x との関係が得られる。

3. 2 一次座屈後の安定判別法

平衡方程式はエネルギー停留原理により、全ポテンシャルエネルギー Π の第一変分 $\delta\Pi$ を零と等価しても求められるが、平衡方程式の安定判別は次に示す Π の第二変分の正負から議論できる。

第二変分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \delta^2\Pi &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{h} \left\{ \frac{\delta N_x^2}{E} + \frac{\delta N_y^2}{E} - \frac{2\nu}{E} \delta N_x \delta N_y + \frac{\delta N_{xy}^2}{G} \right\} \right. \\
 &+ \left. \left\{ N_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right\} \right. \\
 &+ \left. \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (22)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned}
 \delta N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right. \\
 &+ \left. \nu \left\{ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} \right] \\
 \delta N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right. \\
 &+ \left. \nu \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right\} \right] \\
 \delta N_{xy} &= Gh \left[\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right. \\
 &+ \left. \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right] \quad (23)
 \end{aligned} \right\}$$

である。式(22)において、 $\delta^2\Pi > 0$ なら安定となり、 $\delta^2\Pi = 0$ なら中立平衡、 $\delta^2\Pi < 0$ なら不安定である。 $\delta^2\Pi$ の正負を決定するためには、適切な仮想変位を想定すればよいが、そのままでは無限数存在することから、安定判別は困難である。従って、 $\delta^2\Pi$ が極値をとるように仮想変位を求め、安定判別を実行する。仮想変位に関する境界条件の下に $\delta^2\Pi$ を x 、 y 、 z 軸方向のそれぞれの微小擾乱仮想変位 δu 、 δv 、 δw について変分し、次式のような平衡方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\
 \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_y}{\partial y} &= 0
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
 &D_{11} \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 \delta w}{\partial y^4} \\
 &= \delta N_x \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right\} + 2\delta N_{xy} \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} + \delta N_y \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \right\} \\
 &+ N_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \quad (25)
 \end{aligned}$$

面内平衡方程式(24)を満足させる仮想応力関数 δF を導入し、次式のように定義する。

$$\delta N_x = h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial y^2}, \quad \delta N_y = h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2}, \quad \delta N_{xy} = -h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x \partial y} \quad (26)$$

また、一次座屈後の面外平衡方程式へ代入し、 δu 、 δv を消去すると仮想変位に対する適合方程式を得る。

$$\begin{aligned}
 &H_{11} \frac{\partial^4 \delta F}{\partial x^4} + (2H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 \delta F}{\partial x^2 \partial y^2} + H_{11} \frac{\partial^4 \delta F}{\partial y^4} \\
 &= \frac{1}{h} \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\
 &+ \left. 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \quad (27)
 \end{aligned}$$

微小擾乱仮想変位 δu 、 δv 、 δw および仮想面内力 δN_x 、 δN_y 、 δN_{xy} が満足すべき境界条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned}
 x=0, \quad a \quad \delta w = 0, \quad \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = 0, \quad \delta u = 0, \quad \delta N_{xy} = 0 \\
 y=0, \quad b \quad \delta w = 0, \quad \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} = 0, \quad \delta v = 0, \quad \delta N_{xy} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

また、上式の境界条件を満足するように、微小擾乱仮想変位 δw を次式のように定義する。

$$\delta w = \delta w_{pq} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (29)$$

ここで、 p 、 q は一次座屈後の不安定現象が起こった場合の x 、 y 方向の微小擾乱半波数であり、正整数であるが、平衡状態での主たわみ波形と同一の場合は式(28)の δu 、 δv を満足しないため除外する。以上の関係式を適合条件式(27)に代入し、仮想応力関数 δF を求めると次式のようなになる。

$$\begin{aligned}
 \delta F &= \frac{\lambda^2}{4h} \delta w_{pq} (w_{11} + c_{11}) \\
 &\times \left[\frac{\cos\left\{\frac{(1+p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1+q)\pi y}{b}\right\} (p-q)^2}{H_{11}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1+q)^2 + \lambda^2 H_{11}(1+q)^4} \right. \\
 &+ \frac{\cos\left\{\frac{(1+p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1-q)\pi y}{b}\right\} (p+q)^2}{H_{11}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1-q)^2 + \lambda^2 H_{11}(1-q)^4} \\
 &+ \frac{\cos\left\{\frac{(1-p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1+q)\pi y}{b}\right\} (p+q)^2}{H_{11}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1+q)^2 + \lambda^2 H_{11}(1+q)^4} \\
 &+ \left. \frac{\cos\left\{\frac{(1-p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1-q)\pi y}{b}\right\} (p-q)^2}{H_{11}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1-q)^2 + \lambda^2 H_{11}(1-q)^4} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda^2}{4h} \delta w_{pq}(w_{21} + c_{21}) \\
 & \times \left[\frac{\cos\left\{\frac{(2+p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1+q)\pi y}{b}\right\} (p-2q)^2}{H_{11}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1+q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1+q)^4} \right. \\
 & + \frac{\cos\left\{\frac{(2+p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1-q)\pi y}{b}\right\} (p+2q)^2}{H_{11}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1-q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1-q)^4} \\
 & + \frac{\cos\left\{\frac{(2-p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1+q)\pi y}{b}\right\} (p+2q)^2}{H_{11}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1+q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1+q)^4} \\
 & \left. - \frac{\cos\left\{\frac{(2-p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1-q)\pi y}{b}\right\} (p-2q)^2}{H_{11}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1-q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1-q)^4} \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

ここで、式(12)と式(20)よりそれぞれの合応力成分 N_x , N_y , N_{xy} を求め、次に式(26) と式(30)より仮想応力成分 δN_x , δN_y , δN_{xy} を求め、さらに式(19)の w , 式(29)の δw を式(22)の第二変分 $\delta^2 \Pi$ に代入し、二重積分すると安定判別式を得る。

4. 数値解析結果の検討

炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材の擬似等方性積層板について数値計算を実行した。その基本弾性定数(繊維容積含有率 $V_f = 60\%$)は、平均化近似解法により計算され、実験でも確認された値である¹²⁾。

$$\left. \begin{aligned}
 E_L &= 137(\text{GPa}), E_T = 8.17(\text{GPa}), G_{LT} = 4.75(\text{GPa}) \\
 \nu_L &= 0.316, \nu_T = 0.0189
 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

本計算例では、初期たわみを考慮した場合について検討し、積層構成は $[(\pm 63.5) / (\pm 19.5)_2 / (\pm 82.2) / (\pm 44.7)] \text{sym}$ を適用した⁹⁾。まず、Fig.2 に初期たわみがない場合の無次元平均軸圧縮応力 $K (= N_x b^2 / \pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}})$ と x 軸方向の無次元平均軸縮み ε_{mx} の関係を示し、図中の K_p は一次座屈値、 K_S は二次座屈値を示している。ま

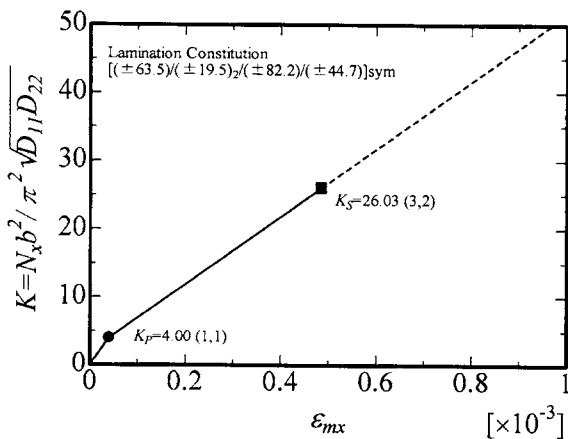


Fig.2 The relation between average axial compressive stress K and average axial shortening ε_{mx} .

た、Table 1 に、それぞれの微小擾乱半波数 p, q における二次座屈値を、初期たわみがない場合との比較を示す。ここで、初期たわみ $c_{11} = 0.1$ は、 x, y 軸方向にそれぞれ 1 半波で、その大きさは板厚の 10% の場合を表し、二次座屈値は、 w_{11} 成分あるいは w_{21} 成分が支配的で、正(初期たわみの方向にたわみが発生する)の場合を K_S^+ 、負(初期たわみと反対方向にたわみが発生する)の場合を K_S^- としている。Fig.3 には、初期たわみを考慮した場合の K と ε_{mx} の関係を示し、それぞれの初期たわみに対する二次座屈値を Table 2 に示す。

Table 1 より、 p, q をそれぞれ変化させ、 $\delta^2 \Pi = 0$ となる場合、つまり安定限界での座屈荷重を算出し、その中の最小値を二次座屈値とする。これより、初期たわみの有無にかかわらず、二次座屈現象の起こる p, q は一致していることがわかる。また、 p, q の値が小さいと常に安定状態となり、二次座屈現象を示すことができない場合がある。しかし、ほとんどの p, q において安定状態か

Table 1 Variation secondary buckling stresses K_S with various deflection patterns.

p	c_{11}	q				
		1	2	3		
		K	K_S^+	K_S^-	K_S^+	K_S^-
1	0.0	Stable	Stable		Stable	
2	0.0	Stable	37.40		150.29	
	0.1		37.23	37.81	146.58	155.89
3	0.0	Stable	26.03		54.08	
	0.1		26.05	26.06	53.92	54.35
4	0.0	Stable	29.99		48.43	
	0.1		29.98	30.01	48.37	48.53
5	0.0	Stable	37.67		52.75	
	0.1		37.66	37.70	52.71	52.82
6	0.0	Stable	47.95		61.40	
	0.1		47.93	47.98	61.37	61.46

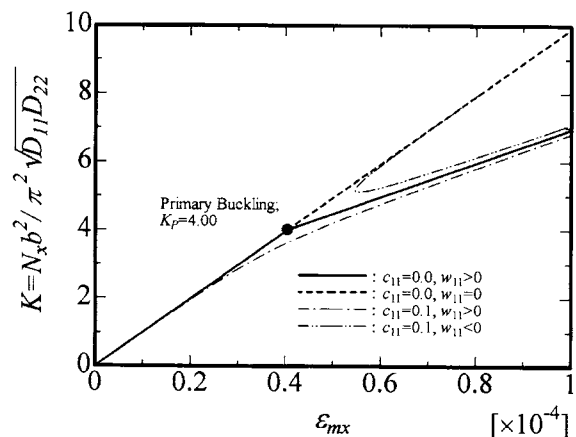


Fig.3 The relation between average axial compressive stress K and average axial shortening ε_{mx} with initial deflection.

Table2 Secondary buckling stresses of quasi-isotropic laminated plates with variation of amplitude of initial deflection.

c_{11}	c_{21}	K^+	K^-
0.01	0.03	26.04	26.04
0.03	0.03	26.04	26.04
0.05	0.03	26.04	26.04
0.10	0.03	26.05	26.06
0.30	0.03	26.16	26.29
0.10	0.01	26.05	26.06
0.10	0.03	26.05	26.06
0.10	0.05	26.05	26.07
0.10	0.10	26.08	26.09

ら不安定状態に変化するため、二次座屈現象の必然性を示すことができた。

Fig.2 より、二次座屈値は一次座屈値に比べ数倍大きな値となっていることから、一次座屈後もかなりの耐荷能力があると考えられる。一次座屈後の剛性が一次座屈前の剛性に比べ低いことは、一次座屈前後で傾きが異なることより示され、また、それらの傾きの大きさは一次座屈後の半波数の影響を大きく受けるものと考えられる。

Fig.3 において、 $w_{11}>0$ は初期たわみの方向にたわんで座屈する場合を、 $w_{11}<0$ は初期たわみと反対方向にたわんで座屈する場合をそれぞれ示している。本論文では w_{11} が支配的な場合のみを考慮しているが、これは一次座屈現象が起こる場合の半波数に依存しているためである。ここで、擬似等方性積層板では、一次座屈時の半波数が x, y 軸方向について、それぞれ 1 半波となるため w_{21} は考慮していない。同様に、 c_{21} は c_{11} に比較して常に小さい値をとることとする。

無次元平均軸圧縮応力を一定とすると、擬似等方性積層板の平均軸縮みは $w_{11}<0$ に比べ $w_{11}>0$ の場合に大きくなり、変位を基準とした場合には危険側にくる。しかし、実際には、初期たわみの方向にたわんで座屈するものと考えられるので、 $w_{11}>0$ の場合に意味があるものと考えられる。

Table2 にそれぞれの初期たわみと二次座屈値との関係を示す。ここで、初期たわみがない場合の二次座屈値が 26.03 であることを考えると、初期たわみが小さい場合の二次座屈値とそれほど違いが見受けられないことから、その影響は小さいものと考えられる。

5. あとがき

本論文では、圧縮荷を受ける周辺単純支持された初期たわみを有する擬似等方性積層板の二次座屈現象について、一次座屈後の挙動を解析し、いまだ研究例のない一次座屈後の不安定現象、つまり二次座屈現象の必然性

を全ポテンシャルエネルギーの第二変分を用いた安定判別法により示した。これより、一次座屈後の擬似等方性積層板の耐荷能力を明らかにし、初期たわみが二次座屈値に与える影響について示した。

また、初期たわみがない場合の二次座屈値と各初期たわみの組合せによる二次座屈値にそれほど違いが見受けられないことから、初期たわみが板厚の 10% 程度であれば二次座屈値への影響は小さいものと考えられる。

参考文献

- 1) 粕谷平和, 康井義明: 積層複合薄板の一軸圧縮座屈に及ぼすカップリング効果, 東海大学紀要工学部, 1982 (1), 181.
- 2) 粕谷平和: 積層複合円筒殻の振動特性に及ぼす積層構成効果, 東海大学紀要工学部, Vol.26, No.2 (1987), 89.
- 3) 粕谷平和: 二軸圧縮を受けるクロスプライ積層板の座屈後の挙動, 東海大学紀要工学部, Vol.29, No.2 (1990), 107.
- 4) K.Nemoto, H.Kasuya, H.Kikugawa and T.Asaka: Post Buckling Behavior of Composite Laminated Plates with Initial Imperfections under Biaxial Compression, *Materials Transaction*, Vol.50, No.2 (2009), 299.
- 5) H. Kasuya and S. Tsunoi: Buckling Strength of Cross-ply Laminated Plates under Biaxial Compression, *Materials Science Research International*, Vol.2, No.2 (1996), 99.
- 6) 粕谷平和, 根本圭一, 辻本真之: 二軸圧縮荷を受けるアングルプライ積層矩形板の座屈強度, 設計工学, Vol.43, No.10 (2008), 52.
- 7) 根本圭一, 遠藤翔, 山口齊, 菊川久夫, 粕谷平和: 二軸圧縮荷を受けるクロスプライ積層矩形板の二次座屈強度, 東海大学紀要工学部, Vol.49, No.1 (2009), 93.
- 8) 根本圭一, 遠藤翔, 山口齊, 菊川久夫, 粕谷平和: 面内圧縮荷を受ける擬似等方性積層板の二次座屈現象に関する理論的考察, 東海大学紀要工学部, Vol.49, No.2 (2009), 95.
- 9) 根本圭一, 遠藤翔, 菊川久夫, 粕谷平和: 二軸圧縮荷を受ける擬似等方性積層板の座屈後解析, 東海大学紀要工学部, Vol.50, No.1 (2010), 95.
- 10) 福永久雄: 積層材の積層パラメータから積層構成を決定する方法について, 日本複合材料学会誌, Vol.13, No.3 (1987), 107.
- 11) R.M. Jones: "Mechanics of Composite Materials", Chap.4, McGraw-Hill, New York (1975).
- 12) Michael P.Nemeth, Importance of Anisotropy on Buckling of Compression-Loaded Symmetric Composite Plates, *AIAA Journal*, Vol.24, No.11(1986), 1831.
- 13) 植村益次, 山田直樹: 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24, No.257(1975), 156.