

細円管を対象とした Two-sensor 法の導出と音場測定

長谷川 真也^{*1} 押野谷 康雄^{*2}

Derivation of Two-Sensor Method and Acoustic Field Measurement for a Narrow Duct

by

Shinya HASEGAWA^{*1}, Yasuo OSHINOYA^{*2}

(Received on Sep. 30, 2010 and accepted on Nov. 17, 2010)

Abstract

Since a thermo-acoustic engine is an external combustion engine triggered by Stirling cycle, it has the potential to draw work out of multiple heat sources such as industrial exhaust heat, automobile exhaust heat and solar energy and so on. Also, as it has a simple structure that uses sound waves for heat exchange, which requires no moving parts such as pistons and turbines, it brings the heat exchange to advantages of being a low-cost, long-use, and maintenance-free system. On the other hand there are issues to be solved for its practical use. Although a thermo acoustic engine holds an advantage of requiring no moving parts, it has a disadvantage of possessing no system to adjust the distribution of pressure amplitude and velocity amplitude that is apt for heat exchange. Therefore, pressure/velocity amplitude distribution of general thermo-acoustic engines cannot be considered to have the adequacy for heat exchange, which in many cases causes inefficiency. In order to achieve high efficiency in a thermo-acoustic engine, the form of the system needs to be decided so that the pressure/velocity amplitude distribution is properly built for the stack, by accurately deriving the pressure/velocity distribution while the engine is in an excited state, and by feeding back the information. In 1992, A. Fusuco introduced Two-sensor method, in which velocity and work flow are measured at two pressure-measurement points, without using LDV. This enabled easier measurement of velocity and work flow of compressed gas only with inexpensive pressure sensors. By applying Two-sensor method, the spatial distribution of pressure/velocity amplitude and work flow can also be derived. In this paper we show detailed derivation of Two-sensor method that enables the calculation of acoustic field in the air, as well as confirming its accuracy by using a straight cylinder closed on both ends.

Keywords: Thermo-acoustic engine, Stirling cycle, Two-sensor measurement, Acoustic field

1. 緒言

地球に供給される太陽光エネルギーの大部分は最終的に地球を暖める熱エネルギーに変換されている。また工場や車両においても膨大な廃熱が発生している。光エネルギーや廃熱を高効率で回収することが可能であれば、地球温暖化やエネルギー問題を解決するための切り札となる。これらのエネルギーを回収し、動力化するために熱音響機関に関する研究を行っている。

熱音響機関は 1979 年に Ceperley が提案した理論に端を発している¹⁾。管内に狭い流路の束（以降、蓄熱器と称する）を設置し、蓄熱器両端の温度比をある臨界値以上にすると、管内の流体が自励振動を起こす。これは熱力学的に原動機と見ることができ、この作用を用いたものが熱音響機関である。熱音響機関はスターリングサイクルで駆動する外燃機関であるために、産業廃熱、自動

車廃熱、太陽光エネルギーなど多様な熱源から高効率で仕事をとり出せる可能性がある。実際に Los-Alamos 研究所の G.W.Swift らが提案した熱音響機関の熱効率は 30%に達する²⁾。また音波を利用して熱交換するシンプルな構成である為に、ピストン、タービンなどの可動部品を全く必要とせず、安価、長寿命、メンテナンスフリーという利点を有する。

実用化を目指して研究が行われている代表的な構成に熱音響発電機がある³⁾。熱音響発電機は一般的にループ管と共鳴管、リニア発電機から構成される。蓄熱器に温度勾配を与えると自励振動が励起される。この音波の振動エネルギーをリニア発電機で電力に変換する。熱音響発電機は宇宙用の電源や廃熱利用発電機、太陽光発電機としての利用が想定されている。また冷房や保冷库、極低温を生成する装置として熱音響冷凍器の研究も活発に行われている⁴⁾。熱音響冷凍器は一般的に 2 つのループ管と共鳴管から構成される。一方のループ管内に設置した

*1 工学部動力機械工学科助教

*2 工学部動力機械工学科教授

蓄熱器 A に温度勾配を与えるると自励振動が励起される。この音波は共鳴管を通じてもう一方のループに流れ込み、逆スターリングサイクルを実行することで、蓄熱器 B を冷凍作動させる。管内音波を使って低温生成を行う熱音響冷凍器には現在のパルス管冷凍機を超えるポテンシャルがある。

一方で実用化に向けた課題も存在する。熱音響機関は可動部を持たないという利点を有するが、その反面、熱交換に適切な圧力・流速分布を調整する機構が存在しないという欠点がある。よって一般的な熱音響機関の圧力・流速分布は必ずしも熱交換に適切であるとは言えず、効率の低下を招いている場合が少なくない。高効率の音響機関を実現するためには、発振状態にある熱音響機関の圧力・流速分布を正確に把握し、その情報をフィードバックすることで、蓄熱器に対して適切な圧力・流速分布が構築できるように装置形状を決定する必要がある。一般的に管内定点の音圧測定は市販の圧力センサを用いることが容易に可能である。一方、流速の測定にはレーザードップラー流速計(LDV)を用いることが多い。しかし LDV は高価な測定機器である上に、測定にレーザー光を用いるという特性上、測定装置をガラスやアクリルで構成する必要がある。このため加圧ガスを作動気体とすることが熱音響機関の出力向上に必須であるにも関わらず、大気圧空気をを用いた測定しか出来ない場合が多かった。1992 年に A.Fusuo らによって LDV を用いず、2 か所の圧力計測のみで流速、並びに仕事流を測定する方法、Two-sensor 法⁵⁾が提案された。これにより安価な圧力センサのみで容易に加圧状態にある気体の流速、並びに音響強度の計測が可能になった。しかし A.Fusuo らの提案した Two-sensor 法は粘性境界層厚さに対して管直径が充分大きい場合にのみ成立するものだった。その後、2007 年に琵琶らによって細管に対しても適用できるように Two-sensor 法は拡張された⁶⁾。Two-sensor 法を応用すれば、定点の圧力振幅、流速振幅、音響強度が測定可能となるだけでなく、これらの空間的な分布も知ることが出来る。本報告では空間的な音場の分布を知ることが可能な Two-sensor 法の詳細な導出を行うと同時に、両端閉口のストレート円筒を用いて、その精度を確認する。

2. 円管内気体支配方程式の線形化

まず、円管内気体の支配方程式を線形化する。円管内の気体の支配方程式(ナビエ・ストークスの式、連続の式、気体の状態方程式、エネルギー方程式)は以下で表すことが出来る。

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) = 0 \quad (2)$$

$$P = \rho R_0 T \quad (3)$$

$$\rho C_p \left[\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} \right] = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial P}{\partial t} + u \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \phi \quad (4)$$

ただし μ : 粘性係数, R_0 : 気体定数, x : 軸方向座標, r : 動径方向座標, u : 軸方向流速, v : 動径方向流速, p : 管内圧力, ρ : 密度, T : 温度, C_p : 定圧比熱, λ : 熱伝導率, ϕ : 散逸関数である。

ここで変動量を以下のように平均値と変動値からなる複素標記を用いて表し線形化する。

$$u(x, r, t) = u_1 e^{j\omega t} \quad (5)$$

$$v(x, r, t) = v_1 e^{j\omega t} \quad (6)$$

$$P(x, r, t) = P_m + P_1 e^{j\omega t} \quad (7)$$

$$\rho(x, r, t) = \rho_m + \rho_1 e^{j\omega t} \quad (8)$$

$$T(x, r, t) = T_m + T_1 e^{j\omega t} \quad (9)$$

ここで添え字の m は平均値, j は虚数, ω は角周波数, t は時間を表わしている。さらに対流は考慮しないため $u_m = v_m = 0$ である。式(5)~(9)を式(1)~(4)に代入し長波長線形近似を行うと以下を得る。

$$j\omega \rho_m u_1 = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_1}{\partial r} \right) \quad (10)$$

$$j\omega \rho_1 + \rho_m \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{v_1}{r} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\frac{P_1}{P_m} = \frac{\rho_1}{\rho_m} + \frac{T_1}{T_m} \quad (12)$$

$$j\omega C_p \rho_m T_1 = \lambda \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + j\omega P_1 \quad (13)$$

また後の計算を容易にするために式(14)を用いて式(10)~(13)を無次元化する。なお式(14)において c は断熱音速の音速, γ は比熱比である。

$$\zeta = \frac{\omega x}{c}, \eta = \frac{r}{r_0}, \hat{u}_1 = \frac{u_1}{c}, \hat{v}_1 = \frac{v_1}{c}, \hat{p}_1 = \frac{p_1}{p_m}, \hat{\rho}_1 = \frac{\rho_1}{\rho_m},$$

$$\hat{T}_1 = \frac{T_1}{T_m}, c = \sqrt{\frac{\gamma P_m}{\rho_m}} \quad (14)$$

$$j\hat{u}_1 = -\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \zeta} + \frac{1}{2\omega \tau_v} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \eta} \right) \quad (15)$$

$$jk_0 r_0 \hat{\rho}_1 = -\left(k_0 r_0 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \eta} + \frac{\hat{v}_1}{\eta} \right) \quad (16)$$

$$\hat{\rho}_1 = \hat{p}_1 - \hat{T}_1 \quad (17)$$

$$j\hat{T}_1 = \frac{1}{2\omega \tau_\alpha} \left(\frac{\partial^2 \hat{T}_1}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \hat{T}_1}{\partial \eta} \right) + j \frac{\gamma - 1}{\gamma} \hat{p}_1 \quad (18)$$

ただし $\nu = \mu/\rho_m$, $\tau_v = r_0^2/2\nu$, $k_0 = \omega/c$, $\alpha = \lambda/C_p \rho_m$, $\tau_\alpha = r_0^2/2\alpha$ とした。なお τ_v は粘性緩和時間, k_0 は断熱音波の波数, α は温度拡散率, τ_α は温度緩和時間である。

3. ベッセル関数を用いた解の導出

式(15)をベッセルの微分方程式に帰着させるために変形を行う。式(15)において $z = j^{\frac{3}{2}} \eta \sqrt{2\omega \tau_v}$ とおくと

$$\frac{\partial^2 \hat{u}_1}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \eta} + \hat{u}_1 = \frac{j}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \zeta} \quad (19)$$

と変形される。更に

$$\hat{u}_1(\zeta, z) = X(\zeta)R(z) \quad (20)$$

のように、変数分離法を用いると式(19)は

$$\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial R}{\partial \eta} + R = \frac{j}{\gamma} \frac{1}{X(\zeta)} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \zeta} \quad (21)$$

となりベッセルの方程式に帰着することが出来る。式

(21)の解はゼロ次の第1種ベッセル関数 J_0 と第2種ベッセル関数 Y_0 を用いると以下のように表すことができる。

$$R(z) = C_1 J_0(z) + C_2 Y_0(z) + \frac{j}{\gamma} \frac{1}{X(\zeta)} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \zeta} \quad (22)$$

$$J_0(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s! \Gamma(s+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2s}, Y_0(z) = \frac{J_0(z) \cos \pi * 0 - J_0(z)}{\sin \pi * 0}$$

なお $\Gamma(\cdot)$ は Γ 関数である。ゼロ次の第2種ベッセル関数 Y_0 は z がゼロの場合 ∞ の値を持つが、実際に管内流速は有限である。よってこの条件を考慮すると C_2 はゼロとなる。また流速は管壁でゼロであることから、 $\hat{u}_1(x, r_0) = 0$ という境界条件を考慮し式(22)を変形すると

$$X(\zeta)R(z) = \hat{u}_1(x, r_0) = C_1 + J_0(z)X(\zeta) + C_2 Y_0(z)X(\zeta) + \frac{j}{\gamma} \frac{1}{X(\zeta)} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \zeta} X(\zeta)$$

$$C_1 = -\frac{j}{\gamma} \frac{1}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_v}\right)} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \zeta} \quad (23)$$

を得る。よって軸方向流速は

$$\begin{aligned} X(\zeta)R(z) = \hat{u}_1 &= -\frac{j}{\gamma} \frac{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_v}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right)} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \zeta} + \frac{j}{\gamma} \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \zeta} \\ &= \frac{j}{\gamma} \left[1 - \frac{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_v}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right)} \right] \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (24)$$

となる。

同様の手順を用いて式(18)もベッセルの微分方程式に帰着させ、解を得る。境界条件は $T_1 \neq \infty$ と $T_1(x, r_0) = 0$ である(温度は有限値であることと、管壁の温度「変動」はゼロであるため)。境界条件と式の形が式(15)と同様であるため、全く同様の展開を行うと以下を得る。

$$\hat{T}_1 = \frac{\gamma-1}{\gamma} \hat{p}_1 \left[1 - \frac{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)} \right] \quad (25)$$

次に式(17)に式(25)を代入することで、密度変動 \hat{p}_1 を求める。

$$\hat{p}_1 = \hat{p}_1 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ 1 - \frac{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)} \right\} \right] \quad (26)$$

最後に式(16)の解を求めるために以下のように展開する。

$$jk_0 r_0 \hat{p}_1 = -\left(k_0 r_0 \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \zeta} + \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \eta} + \frac{\hat{v}_1}{\eta} \right)$$

$$k_0 r_0 \left(j \hat{p}_1 + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \zeta} \right) = -\left(\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \eta} + \frac{\hat{v}_1}{\eta} \right)$$

$$k_0 r_0 \left(j \hat{p}_1 + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \zeta} \right) = -\frac{1}{\eta} \left(\eta \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta \hat{v}_1}{\partial \eta} \right)$$

$$-\frac{1}{\eta} \frac{\partial(\hat{v}_1 \cdot \eta)}{\partial \eta} = k_0 r_0 \left(j \hat{p}_1 + \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \zeta} \right) \quad (27)$$

式(27)に式(25), (26)を代入し、両辺に η を乗じる。

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial(\hat{v}_1 \cdot \eta)}{\partial \eta} \\ &= jk_0 r_0 \hat{p}_1 \left[\eta - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ \eta - \frac{\eta J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)} \right\} \right] \\ &+ jk_0 r_0 \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial \zeta^2} \left[\eta - \frac{\eta J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_v}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right)} \right] \end{aligned} \quad (28)$$

ここで η に関して積分行くと以下を得る。

$$\begin{aligned} &-\hat{v}_1 \eta \\ &= jk_0 r_0 \hat{p}_1 \left[\frac{1}{2} \eta^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ \frac{1}{2} \eta^2 - \frac{\eta}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}} \frac{J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)} \right\} \right] \\ &+ jk_0 r_0 \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial \zeta^2} \left[\frac{1}{2} \eta^2 - \frac{\eta}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}} \frac{J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_v}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right)} \right] + S(\eta) \end{aligned} \quad (29)$$

ただし式(30)に示すベッセル関数の漸化式を用いた。

$$\begin{aligned} \int \eta J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_v}\right) d\eta &= \frac{\eta}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}} J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_v}\right), \\ \int \eta J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right) d\eta &= \frac{\eta}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}} J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\eta\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right) \end{aligned} \quad (30)$$

なお $S(\eta)$ は積分定数である。管壁における動径方向流速 \hat{v}_1 に関する境界条件 $\hat{v}_1(x, r_0) = 0$ を用いると式(29)は

$$\begin{aligned} -\frac{S(\eta)}{jk_0 r_0} &= \frac{1}{2} \hat{p}_1 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \left\{ 1 - \frac{2}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}} \frac{J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)} \right\} \right] \\ &+ \frac{11}{2\gamma} \frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial \zeta^2} \left[1 - \frac{2}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}} \frac{J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right)} \right] \end{aligned} \quad (31)$$

となる。ここで式(32)に示すベッセル関数の漸化式を用いて式(31)を簡略化する。

$$\begin{aligned} J_2\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right) &= \frac{2J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right)}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}} - J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right), \\ J_2\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right) &= \frac{2J_1\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)}{j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}} - J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right) \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} -\frac{S(\eta)}{jk_0 r_0} &= \frac{1}{2} \hat{p}_1 \left[1 + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{J_2\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_\alpha}\right)} \right] \\ &- \frac{1}{2\gamma} \frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial \zeta^2} \frac{J_2\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right)}{J_0\left(j^{\frac{3}{2}}\sqrt{2\omega\tau_v}\right)} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで動径方向流速 \hat{v}_1 の軸対称性、すなわち $\hat{v}_1(x, 0) = 0$ を式(29)が満たすためには $S(\eta) = 0$ が必要となる。よってこれを式(33)に代入することで以下を得る。

$$0 = \hat{p}_1 \left[1 + \frac{\gamma - 1 J_2 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\alpha} \right)}{\gamma J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\alpha} \right)} \right] - \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \hat{p}_1}{\partial \zeta^2} \frac{J_2 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)}{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} \quad (34)$$

式(34)は2階の微分方程式である。基本解を

$$\hat{p}_1 = A e^{\Gamma \zeta} \quad (35)$$

とし式(34)に代入すると次式を得る。 Γ は伝搬定数である。

$$0 = \left[1 + \frac{\gamma - 1 J_2 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\alpha} \right)}{\gamma J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\alpha} \right)} - \frac{\Gamma^2 J_2 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)}{\gamma J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} \right] A e^{\Gamma \zeta},$$

$$0 = \left[1 + \frac{\gamma - 1 J_2 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\alpha} \right)}{\gamma J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\alpha} \right)} - \Gamma^2 \frac{J_2 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)}{\gamma J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} \right],$$

$$\Gamma = \pm \sqrt{\frac{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)}{J_2 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} \left[\gamma + (\gamma - 1) \frac{J_2 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\alpha} \right)}{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\alpha} \right)} \right]} \quad (36)$$

よって式(34)の一般解は以下で表わせる。

$$\hat{p}_1 = A_1 e^{\Gamma_+ \zeta} + A_2 e^{\Gamma_- \zeta} \quad (37)$$

但し A_1 , A_2 は任意の複素定数である。

4. 軸方向流速の断面平均処理

$\hat{u}_1 = u_1/c$, $c^2 \rho_m/p_m = \gamma$, $k_0 = \omega/c$, $\zeta = \omega x/c$, $\eta = r/r_0$ であったことから, 式(37)を用いると, 式(24)は以下のように変形できる。

$$\frac{u_1}{c} = \frac{j\Gamma p_m}{c^2 \rho_m} \left[1 - \frac{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} (r/r_0) \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)}{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} \right] (A_1 e^{\Gamma_+ \omega x/c} - A_2 e^{\Gamma_- \omega x/c})$$

$$u_1 = \frac{jk_0 \Gamma}{\omega \rho_m} \left[1 - \frac{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \left(\frac{r}{r_0} \right) \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)}{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} \right] \cdot (A_1 p_m e^{\Gamma_+ k_0 x} - A_2 p_m e^{\Gamma_- k_0 x}) \quad (38)$$

ここで $k = -jk_0 \Gamma$ とおき, $P_+ = A_1 p_m$, $P_- = A_2 p_m$ とすると以下を得る。

$$u_1 = \frac{k}{\omega \rho_m} \left[1 - \frac{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} (r/r_0) \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)}{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} \right] (p_+ e^{-jkx} - p_- e^{jkx}) \quad (39)$$

なお k は複素波数, p_+ は正方向への進行波振幅, p_- は負方向への進行波振幅を表わしている。なお同様に式(37)も以下のように書きかえることが出来る。

$$p_1 = p_+ e^{-jkx} + p_- e^{jkx} \quad (40)$$

ここで式(39)を簡略化するために

$$\frac{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} (r/r_0) \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)}{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} = f_v \quad (41)$$

とおくと式(42)を得る。

$$u_1 = \frac{k(1-f_v)}{\omega \rho_m} (p_+ e^{-jkx} - p_- e^{jkx}) \quad (42)$$

式(42)を円管断面で積分し, 断面積で割ると次式を得る。

$$\langle u_1 \rangle_r = \frac{1}{\pi r_0^2} \int_0^{r_0} u_1 \cdot 2\pi r dr = 2 \int_0^1 u_1 \cdot \eta d\eta$$

$$= \frac{k}{\omega \rho_m} (p_+ e^{-jkx} - p_- e^{jkx}) \cdot \left[1 - \frac{2}{J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} \int_0^1 \eta J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \eta \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right) d\eta \right] \quad (43)$$

なお $\langle \rangle_r$ は今後断面平均を表す記号とする。ここで式(30)で示したベッセル関数の漸化式を式(43)に代入することで断面平均流速は以下で示すことができる。

$$\langle u_1 \rangle_r = \frac{k}{\omega \rho_m} \left[1 - \frac{2 J_1 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)}{j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} \right] \cdot (p_+ e^{jkx} - p_- e^{-jkx}) \quad (44)$$

また式(44)も簡略化するために

$$\frac{2 J_1 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)}{j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} J_0 \left(j^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\omega\tau_\nu} \right)} = \chi_v \quad (45)$$

とおくと次式を得る。

$$\langle u_1 \rangle_r = \frac{k(1-\chi_v)}{\omega \rho_m} (p_+ e^{jkx} - p_- e^{-jkx}) \quad (46)$$

5. Two-sensor 法の導出

式(40), (46)は断熱かつ連続の管内空間において, 任意点における進行波振幅 p_{\pm} を知ることができれば, 管内全空間の圧力振幅分布, 流速振幅分布を知ることが可能であることを意味している。管内の全圧力振幅分布, 流速振幅分布を知ることが可能であるということは, 管内の全音響強度分布を知ることが可能であることと等価である。音響強度は, 音波が輸送する単位時間, 単位断面積当たりの力学的エネルギーを表わし, 任意点時間的圧力変動 $|p_1| e^{j\omega t}$ と断面平均化した任意点時間的流速変動 $\langle u_1 \rangle_r e^{j(\omega t - \phi)}$ の積の時間平均で定義される。圧力変動の共役と流速変動を乗じ, 時間平均をとると音響強度は以下で表わせる。

$$I = \text{Re} \langle [p_1 e^{j\omega t}] [\langle u_1 \rangle_r e^{-j(\omega t - \phi)}] \rangle_t = |p_1| \langle \langle u_1 \rangle_r \rangle_t \text{Re}(e^{j\phi})_t$$

$$= \frac{1}{2} |p_1| \langle \langle u_1 \rangle_r \rangle_t \text{Re}[e^{j\phi}] = \frac{1}{2} |p_1| \langle \langle u_1 \rangle_r \rangle_t \cos \phi \quad (47)$$

理論計算では式(40), (46), (47)に進行波振幅 p_{\pm} を代入することによって, 管内全空間の圧力振幅分布, 流速振幅分布, 音響強度分布を知ることが出来る。次に式(40), (46), (47)を変形し, Two-sensor 法を導く。実験時, 流速をLDV等で直接測定可能な場合は, 容易に任意点の音響強度を求めることが出来る。しかし前述のようにLDV

は高価であると同時に、加圧容器内の流速を測定することは困難である。一方、隣接した2点の圧力計測から間接的に音響強度を求めることが可能な Two-sensor 法は、安価かつ加圧容器内の流速を求めることが出来る。式(40), (46), (47)から自明であるが、管内任意位置における p_+ を知る事が出来れば、管内全空間の圧力振幅分布、流速振幅分布、音響強度分布を知ることが出来る。実験によって p_{\pm} を定める手法が Two-sensor 法である。Two-sensor 法では音響強度を求めたい場所をゼロ点として、Fig.1 のように $\pm \Delta x/2$ 離れた2点で位相を含めた圧力 p_A, p_B を圧力センサにて測定する。これらの値から、ゼロ点の圧力並びに、流速、音響強度を求める。まずゼロ点の圧力 $p_{\pm 0}$ を得るためにゼロ点から、 $\pm \Delta x/2$ 離れた2点の圧力 p_A, p_B を以下のように定義する。

$$p_A = p_{+0}e^{-ik\Delta x/2} + p_{-0}e^{ik\Delta x/2} \quad (48)$$

$$p_B = p_{+0}e^{ik\Delta x/2} + p_{-0}e^{-ik\Delta x/2} \quad (49)$$

なお p_A, p_B は時間的複素振動量であり、それぞれ $p_A = p_A e^{j\omega t}$, $p_B = p_B e^{j(\omega t - \phi)}$ と表すことができる。式(48), (49)を連立することによって、以下のように $p_{\pm 0}$ を得ることが出来る。

$$p_{+0} = \frac{p_A + p_B}{4\cos(k\Delta x/2)} + \frac{p_A - p_B}{4i\sin(k\Delta x/2)} \quad (50)$$

$$p_{-0} = \frac{p_A + p_B}{4\cos(k\Delta x/2)} - \frac{p_A - p_B}{4i\sin(k\Delta x/2)} \quad (51)$$

これらを式(40), (46)に代入する。このとき x はゼロであるため、 e^{-ikx} は1となる。よって以下を得る。

$$u_0 = \frac{k(1 - \chi_v)}{\omega \rho_m} (p_{+0} - p_{-0}) \quad (52)$$

$$p_0 = p_{+0} + p_{-0} \quad (53)$$

式(52), (53)を式(47)に代入することによって、音響強度を表す式(54)を得る⁹⁾。

$$I = \frac{1}{2} |p_0| |u_0| \cos\theta \quad (54)$$

以上よりゼロ点における圧力振幅、流速振幅、音響強度を得ることが出来る。任意点における圧力振幅、流速振幅、音響強度を得たい場合は、式(50), (51)で得た $p_{\pm 0}$ と座標を式(40)に代入することによって、任意点における圧力振幅を得ることが出来る。また同様に $p_{\pm 0}$ と座標を式(46)に代入することによって任意点流速振幅を得る。

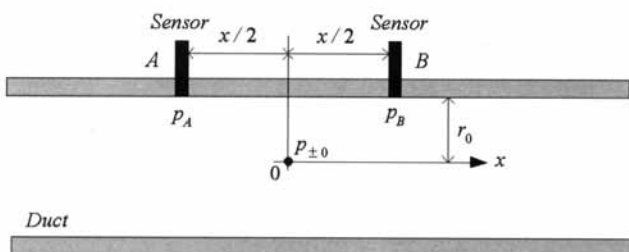


Fig. 1 Theoretical model.

最後に任意座標における圧力振幅と流速振幅を式(47)に代入することで任意点音響強度を得ることが出来る。

6. Two-sensor 法を用いた管内音場測定

本報告では、Fig.2 に示す実験装置を対象に、Two-sensor 法を用いた管内音場分布測定を行い、その精度を確認する。Fig.2 において、円筒パイプ（塩化ビニル製、長さ 1m、内径 0.04m）の一端をステンレス製の壁で閉じ、もう一端にラウドスピーカ（FOSTEX®, FW108N）を接続する。円筒パイプ内部には外気温度と同様の大気圧空気が封入されている。ファンクションジェネレータを用いて大気圧空気下における両閉口端条件の気柱共振周波数である 170Hz の sin 波を発生させ、音響パワーアンプ（株式会社テラアーム・システムズ, RSDA302U）にて信号を増幅、ラウドスピーカにて音波を発生させる。気柱の共振周波数で加振しているため、圧力振幅分布は円筒パイプの両端で最大、中心で最小となり、逆に流速振幅分布は円筒パイプの両端で最小（壁面ではゼロ）、中心で最大となる。また音響強度はラウドスピーカの直近で最大、壁面でゼロとなる。Two-sensor 法の精度が正しければ、計測した音場分布は以上の条件を全て満たすはずである。Two-sensor 法では2つのセンサのペアを用いて各圧力とその位相差を測定し、その結果から流速、音響強度を求める。本報告では、Two-sensor 法の精度を確認する目的から、Fig.2 のように設置位置を変えた圧力センサを3つ用いる。便宜上、それぞれの圧力センサをセンサ A, B, C と呼称する。センサの組み合わせは A-B, B-C, A-C の三通り存在し、センサの精度、Two-sensor 法の精度に問題がなければ、どの組み合わせでも導出した圧力振幅分布、流速振幅分布、音響強度分布は一致するはずである。圧力計測には株式会社 JTEKT 製の半導体圧力センサ PD104K と、その専用アンプ AA6210 を用いた。圧力を計測するために、塩化ビニルパイプの管壁に直径 10mm 程度の穴を穿ち、半導体圧力センサのヘッドを Fig.2 に示すように取り付けた。データのロギングはオムロン株式会社 ZR-RX70 を使い、計測した時刻歴データをフーリエ変換することで、圧力振幅とセンサ間位相差を求めた。

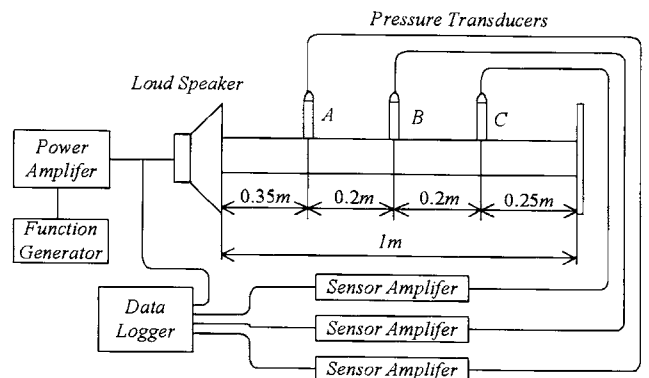


Fig.2 Diagram of experimental apparatus.

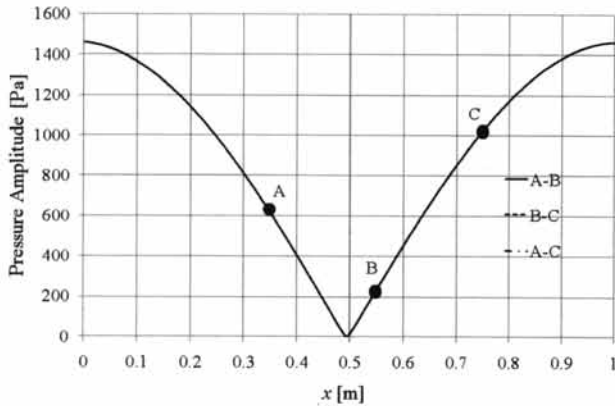


Fig.3 Distribution of Pressure Amplitude.

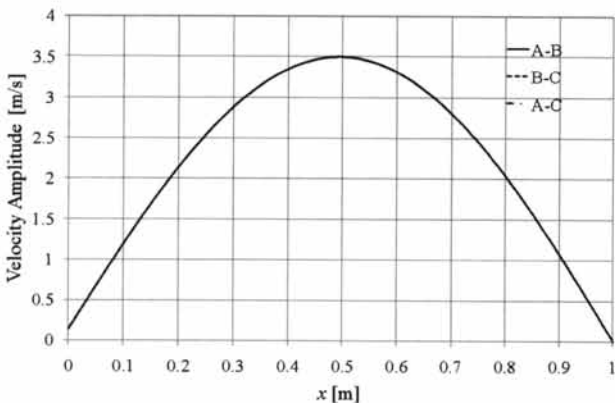


Fig.4 Distribution of Velocity Amplitude.

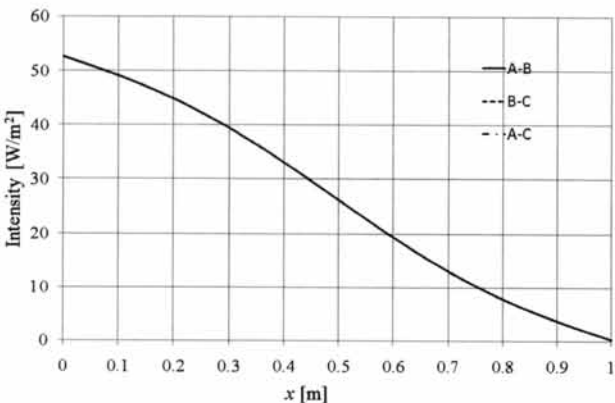


Fig.5 Distribution of Intensity.

Fig.3 おける黒丸 (●) は、A、B、C の圧力センサ、それぞれで測定した値をフーリエ変換することで得た振幅値 (実測値) である。縦軸は圧力振幅 [Pa] を表し、横軸はラウドスピーカ設置位置をゼロ点とした座標を表している。また図中の実線、破線、一点鎖線はそれぞれ、A-B、B-C、A-C の組み合わせにおける ● の値と各センサ間位相差を用いて Two-sensor 法により求めた圧力振幅分布 (計算値) である。A-B、B-C、A-C それぞれの計算値、並びに ● はほぼ完全に重なっており、圧力振幅分布においてセンサ個体間の誤差はほとんど生じていないことと、Two-sensor 法の精度が確認出来る。また、圧力振幅分布は円筒パイプの両端で最大、中心で最小となり理論的な

分布と整合する。次に Fig.3 と同様に ● と各センサ間位相差を用いて Two-sensor 法にて流速分布 (計算値) と音響強度分布 (計算値) を計算した。結果を Fig.4, Fig.5 に示す。Fig.4 において縦軸は流速振幅、Fig.5 において縦軸は音響強度、Fig.4, Fig.5 共に横軸はラウドスピーカ設置位置をゼロ点とした座標を表している。また図中の実線、破線、一点鎖線は Fig.3 と同様に、それぞれ、A-B、B-C、A-C の組み合わせにおける ● の値と各センサ間位相差を用いて Two-sensor 法により求めた流速振幅分布、音響強度分布である。Fig.4 を確認すると、A-B、B-C、A-C は重なっており、測定点やセンサの個体差による誤差がほとんど無いことを確認できる。また流速振幅分布は円筒パイプの両端で最小かつ壁面ではゼロであり、中心で最大となることから理論的な分布と整合している。さらに Fig.5 も A-B、B-C、A-C はほぼ重なっていると同時に、音響強度はラウドスピーカの直近で最大、壁面でゼロとなっている。以上から、Two-sensor 法を用いることによって圧力振幅分布、流速振幅分布、音響強度分布を高精度かつ容易に求めることが出来ることを確認できた。

7. 結言

本研究では Two-sensor の詳細な導出を行うと同時に、圧力振幅、流速振幅、仕事流の空間的な分布の計算を行った。両端閉口のストレート円筒を対象とした実験を行った結果は理論的な境界条件を満たし、その精度を確認することが出来た。Two-sensor 法を用いることによって、LDV 等の装置を用いることなく、容易に音場を計測することが出来る。今後は、発振状態にある熱音機関を対象として、音場を計測することによって、蓄熱器に対して適切な圧力・流速分布を実現する装置形状を決定する。

謝辞

本研究に際して東海大学学部生 上面剛洋氏、清野大地氏、山岸裕太氏、山口剛史氏に多大な協力を得た。ここに感謝の意を表する。

参考文献

- 1) P.H.Ceperley, J.Acoust. Soc. Am., 66, pp.1508-1513, 1979.
- 2) S.Backhaus and G.W.Swift, Nature, Vol.399, pp.335-338, 1999.
- 3) S.Backhaus, E.Tward and M.Petach, Appl.Phys.Lett., Vol.85, pp.1085-1087, 2004.
- 4) M. Miwa, T. Sumi, T. Biwa, Y. Ueda and T. Yazaki, Ultrasonics, 44, e1527-e1529, 2006.
- 5) A. Fusco, W. Ward and G.W.Swift, J. Acoust. Soc. Am. 91, pp.2229-2235, 1992.
- 6) T. Biwa, Rev. of Sci. Inst. 78(8), pp.086110-1-3, 2007.