

## 二軸圧縮負荷を受ける対称積層板の 座屈後挙動に及ぼす積層構成の影響

根本 圭一<sup>\*1</sup> 小比賀 透<sup>\*2</sup> 菊川 久夫<sup>\*3</sup> 森山 裕幸<sup>\*4</sup> 粕谷 平和<sup>\*4</sup>

### Effect of Lamination Constitution on Post-Buckling Behavior of Symmetrically Laminated Plates Subjected to Biaxial Compressive Loads

by

Keiichi NEMOTO<sup>\*1</sup>, Tooru KOHIGA<sup>\*2</sup>, Hisao KIKUGAWA<sup>\*3</sup>, Hiroyuki MORIYAMA<sup>\*4</sup>  
and Hirakazu KASUYA<sup>\*4</sup>

(Received on Mar. 30, 2012 and accepted on Jul. 11, 2012)

#### Abstract

Advanced composite materials including those using carbon fiber reinforced plastic (CFRP) are being increasingly used in engineering applications including aerospace, mechanical, marine and automotive engineering because they offer excellent properties such as high specific strength and specific stiffness. Many researchers have examined the postbuckling behaviors of thin laminated plates under uniaxial compression, but few have examined the secondary buckling phenomenon for thin laminated plate that occurs as the load is increased further. In this paper, the second variation of total potential energy is used to determine the stability condition of carbon-epoxy symmetrically laminated plates under biaxial compressive loads that are simply supported along four edges. The necessity of secondary buckling is proven analytically, and the effects of various factors including lamination constitution and biaxial compressive load ratios are clarified.

**Keywords:** structural analysis, composite materials, CFRP, secondary buckling, symmetrically-laminated, lamination constitution, biaxial compressive load ratios

## 1. まえがき

近年、構造物の軽量化、高速化にともない、比強度、比剛性の高い繊維強化プラスチック材、特に炭素繊維からなる高性能繊維強化プラスチック材は、薄肉軽量構造材として、航空宇宙をはじめとする各分野で数多く使用されている。このように、構造物が薄肉軽量化される場合には、座屈が構造設計基準として用いられるため、その挙動を解明することは重要である。そして、積層構成によっては面内変形と面外変形が連成するカップリング効果が発生し、座屈荷重<sup>1)</sup>を低下させる原因となるため、できる限りカップリング項が少なくなる積層構成が選ばれている。そのため、通常、対称バランスト積層が用いられていることが多く、また、対称積層板に対する座屈実験を実施し、座屈強度の研究がされてきた<sup>2)~4)</sup>。

面内圧縮負荷を受ける積層薄板は座屈後も荷重低下がなく耐荷能力があるため、一次座屈後も使用することが

可能である<sup>5)~7)</sup>。しかしながら、一次座屈後さらに荷重を加えても、いつまでも安定状態が続くわけではなく、ある荷重において不安定となり、耐荷剛性がさらに低下する二次座屈現象<sup>8)~11)</sup>が起こる。

著者らは *M.P.Nemeth*<sup>12)</sup>が提案した  $0^\circ$ 、 $90^\circ$  および  $\pm 45^\circ$  からなる積層構成で面内剛性が等方性となる対称積層板に着目し、多層積層になると一次座屈値および二次座屈値は等方性薄板の座屈値へそれぞれ収束していくことを理論的に明らかにした<sup>13)</sup>。

本論文では田村ら<sup>11)</sup>が検討したように、二軸圧縮負荷状態で面内剛性が等方性となる対称積層板を取扱い、前報<sup>13)</sup>、<sup>14)</sup>の理論を応用し、全ポテンシャルエネルギーの第2変分値により一次座屈後の平衡状態の安定判別を行う方法を用いて明らかにする。また、二次座屈現象に与える諸因子として積層構成、二軸圧縮荷重比の影響を解析的手法により明らかにする。

## 2. 座屈解析法

### 2.1 対称積層板の基礎式

Fig.1 に示すような対称積層板が面内圧縮荷重  $\bar{N}_x$ 、 $\bar{N}_y$  を受ける場合を考え、中央面の変位を  $u$ 、 $v$ 、 $w$  とし、Fig.2

\*1: 横浜ゴム株式会社 航空部品技術部

\*2: 工学研究科機械工学専攻 修士課程

\*3: 工学部医用生体工学科 教授

\*4: 工学部動力機械工学科 教授

のように  $N$  層からなる対称積層板において、 $k$  番目の層は基準面から  $z=h_k \sim h_{k+1}$  間に存在し、積層角  $\theta_k$  は  $x$  軸との角度をなすものとする。面内ひずみ成分  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 、曲率成分  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  と変位  $u, v, w$  との関係は座屈後の安定問題を解析するために、二次の微小項を考慮した有限変形理論を用いると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

また、面内ひずみ成分  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$  と平面応力成分  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  との関係は、弾性域に限定すると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x / E - \nu \sigma_y / E \\ \varepsilon_y &= \sigma_y / E - \nu \sigma_x / E \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

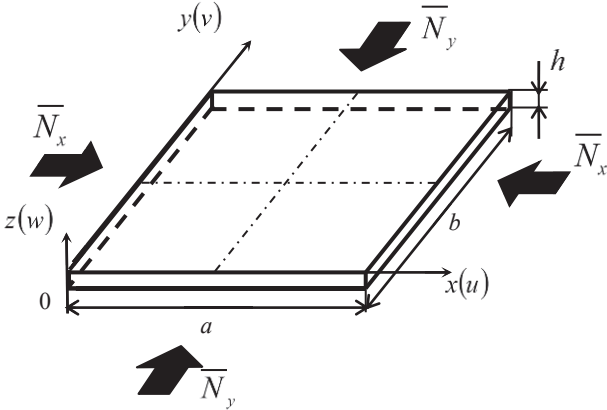


Fig.1 Configuration and coordinates of symmetrically laminated plates under biaxial compressive loads.

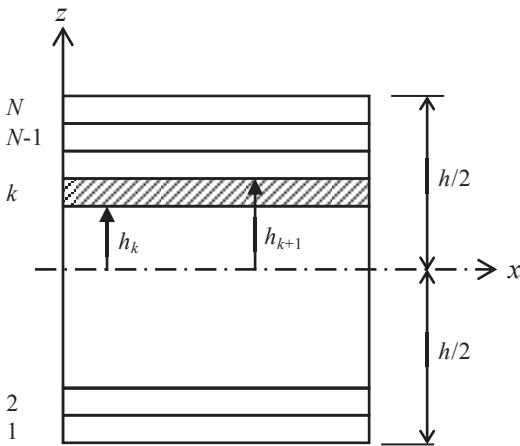


Fig.2 Stacking sequence of symmetrically laminated Plates.

本論文では面内が等方性となる対称積層板を扱っているため、縦弾性係数を  $E$  ( $E_x=E_y$ ), せん断弾性係数を  $G$  ( $=G_{xy}$ ), さらにポアソン比を  $\nu$  ( $\nu_x=\nu_y$ ) と整理することができる。

本解析モデルにおいては中央面に対して、対称バラストされた積層を考えているので、その時の合応力成分  $N_x, N_y, N_{xy}$  と面内ひずみ成分、合モーメント成分  $M_x, M_y, M_{xy}$  と曲率成分との関係は次式で表される<sup>15)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、 $A_{ij}$  は伸張剛性マトリックス、 $D_{ij}$  は曲げ剛性マトリックスであり、それぞれ、異方性材の繊維方向、繊維に直角方向の縦弾性係数  $E_L, E_T$ , ポアソン比  $\nu_L, \nu_T$ , せん断弾性係数  $G_{LT}$  および積層角  $\theta$  が与えられると求められ、次式で示される。なお、添え字の  $L$  は繊維の長手方向“Longitudinal”,  $T$  は繊維と直角方向“Transverse”の頭文字をそれぞれ意味する。

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (h_{k+1} - h_k) \\ D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (h_{k+1}^3 - h_k^3) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし、曲げ-ねじりカップリング剛性項  $D_{16}, D_{26}$  を考慮した薄板の座屈後解析は非常に困難であり、この曲げ-ねじりカップリング剛性項が座屈強度に与える影響は無次元異方性パラメータ  $\gamma, \delta$  を用いて評価することができる<sup>12)</sup>。

$$\gamma = \frac{D_{16}}{\sqrt[4]{D_{11}^3 D_{22}}}, \quad \delta = \frac{D_{26}}{\sqrt[4]{D_{11} D_{22}^3}} \quad (6)$$

そして、 $\gamma, \delta$  の値がそれぞれ 0.2 より小さい積層板では曲げ-ねじりカップリング効果は無視できる<sup>12)</sup>。よって、本論文では  $\gamma, \delta$  の値が共に 0.2 以下の積層構成について取り扱う。

圧縮負荷を受ける対称積層板の面内変形エネルギー、曲げエネルギーをそれぞれ  $U_m, U_b$  とすると

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \\ U_b &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

であり、変位により圧縮負荷を受ける場合の全ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = U_m + U_b \quad (8)$$

である。式(8)に式(3), (4)および(7)を代入すると,

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \frac{1}{h} \left\{ \frac{N_x^2}{E} - \frac{2\nu}{E} N_x N_y + \frac{N_y^2}{E} + \frac{N_{xy}^2}{G} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

となる。

## 2. 2 平衡方程式と適合方程式

対称積層板の面内および板厚方向の平衡方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、面内平衡方程式(10)を満足するように、応力関数  $F$  を次式のように定義する。

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

上式の応力関数  $F$  を用いると板厚方向の平衡方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} & D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ & = h \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

一方、適合方程式は式(1)から  $u$ ,  $v$  を消去すると,

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (14)$$

となり、さらに応力関数を用いて示すと次式のように示される。

$$\begin{aligned} & H_{11} \left( \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + 2(H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \\ & = \frac{1}{h} \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= A_{11} A_{66} / H, \quad H_{12} = -A_{12} A_{66} / H \\ H_{66} &= (A_{11}^2 - A_{12}^2) / H, \quad H = A_{11}^2 A_{66} - A_{12}^2 A_{66} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

である。

## 3. 一次座屈後の挙動解析

### 3. 1 対称積層板の一次座屈後の挙動

周辺単純支持の場合、一次座屈後の板厚方向の面外境界条件は式(17)で示される。

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x=0, a \\ w &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at } y=0, b \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

面内境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x &= 0, a \text{ で } u \text{ は } y \text{ 軸に沿って一定で} \\ & \int_0^b \bar{N}_x dy = -\bar{N}_x b, \quad N_{xy} = 0 \\ y &= 0, b \text{ で } v \text{ は } x \text{ 軸に沿って一定で} \\ & \int_0^a \bar{N}_y dx = -\bar{N}_y a, \quad N_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

である。

板厚方向の面外境界条件を満足するように、一次座屈後のたわみ波形  $w$  を次式のように近似表示する。

$$w = w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (19)$$

ここで、 $m$ ,  $n$  はそれぞれ一次座屈時の  $x$ ,  $y$  方向の座屈半波数である。

上式を式(15)の適合方程式へ代入し、面内境界条件を満足する応力関数  $F$  を求めると、

$$\begin{aligned} F = & \frac{w_{mn}^2}{32h} \left\{ \frac{1}{H_{11}} \left( \frac{an}{mb} \right)^2 \cos^2 \frac{2m\pi x}{a} \right. \\ & \left. + \frac{1}{H_{11}} \left( \frac{mb}{an} \right)^2 \cos^2 \frac{2n\pi y}{b} \right\} - \frac{\sigma_x y^2}{2} - \frac{\sigma_y x^2}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

となる。上式を面外平衡方程式へ代入し、Galerkin法を適用することにより次式のような  $w_{mn}$  に関する三次方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\pi w_{mn}}{4\lambda} \\ & \times \left[ \frac{1}{h} \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \left\{ D_{11} \left( \frac{m}{\lambda} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})n^2 + D_{22}n^4 \left( \frac{\lambda}{m} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{w_{mn}^2}{16h} \left( \frac{\pi}{b} \right)^2 \left\{ \frac{1}{H_{11}} \left( \frac{m}{\lambda} \right)^2 + \frac{n^4}{H_{11}} \left( \frac{\lambda}{m} \right)^2 \right\} - \sigma_x \left\{ 1 + k_y \lambda^2 \left( \frac{n}{m} \right)^2 \right\} \right] = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $\lambda (=a/b)$  は平板のアスペクト比、 $k_y (=N_y/N_x)$  は二軸圧縮荷重比である。また、上式より  $\sigma_x$  と  $w_{mn}$  の関係が得られる。

### 3. 2 一次座屈後の安定判別法

平衡方程式はエネルギー停留原理により、全ポテンシャルエネルギー  $\Pi$  の第一変分  $\delta\Pi$  を零と等価しても求められるが、平衡方程式の安定判別は次に示す  $\Pi$  の第二変分の正負から議論でき、第二変分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta^2\Pi = & \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \frac{1}{h} \left\{ \frac{\delta N_x^2}{E} + \frac{\delta N_y^2}{E} - \frac{2\nu}{E} \delta N_x \delta N_y + \frac{\delta N_{xy}^2}{G} \right\} \right. \\ & + \left. \left\{ N_x \left( \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right\} \right. \\ & + \left. \left\{ D_{11} \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \end{aligned} \quad (22)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \delta N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} \\ \delta N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right\} \\ \delta N_{xy} &= Gh \left( \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

である。式(22)において、 $\delta^2\Pi > 0$  なら安定となり、 $\delta^2\Pi = 0$  なら中立平衡、 $\delta^2\Pi < 0$  なら不安定である。 $\delta^2\Pi$  の正負を決定するためには、適切な仮想変位を想定すればよいが、そのままでは無限数存在することから、安定判別は困難である。従って、 $\delta^2\Pi$  が極値をとるように仮想変位を求め、安定判別を実行する。仮想変位に関する境界条件の下に  $\delta^2\Pi$  を  $x$ 、 $y$ 、 $z$  軸方向のそれぞれの微小擾乱仮想変位  $\delta u$ 、 $\delta v$ 、 $\delta w$  について変分し、次式のような平衡方程式を得る。

$$\frac{\partial \delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_y}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \delta M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \delta M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \delta M_y}{\partial y^2} \\ & + \delta N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\delta N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \delta N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ & + N_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

面内平衡方程式(24)を満足させる仮想応力関数  $\delta F$  を導入し、次式のように定義する。

$$\delta N_x = h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial y^2}, \quad \delta N_y = h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2}, \quad \delta N_{xy} = -h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x \partial y} \quad (26)$$

また、一次座屈後の面外平衡方程式へ代入し、 $\delta u$ 、 $\delta v$  を消去すると仮想変位に対する適合方程式を得る。

$$\begin{aligned} & H_{11} \frac{\partial^4 \delta F}{\partial x^4} + (2H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 \delta F}{\partial x^2 \partial y^2} + H_{11} \frac{\partial^4 \delta F}{\partial y^4} \\ & = \frac{1}{h} \left\{ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (27)$$

微小擾乱仮想変位  $\delta u$ 、 $\delta v$ 、 $\delta w$  および仮想面内力  $\delta N_x$ 、 $\delta N_y$ 、 $\delta N_{xy}$  が満足すべき境界条件は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} x=0, \quad a \quad & \delta w=0, \quad \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}=0, \quad \delta u=0, \quad \delta N_{xy}=0 \\ y=0, \quad b \quad & \delta w=0, \quad \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}=0, \quad \delta v=0, \quad \delta N_{xy}=0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

また、上式の境界条件を満足するように、微小擾乱仮想変位  $\delta w$  を次式のように定義する。

$$\delta w = \delta w_{pq} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (29)$$

ここで、 $m$ 、 $n$  は一次座屈後の不安定現象が起こった場合の  $x$ 、 $y$  方向の微小擾乱半波数であり、正整数であるが、平衡状態での主たわみ波形と同一の場合は式(28)の  $\delta u$ 、 $\delta v$  を満足しないため除外する。以上の関係式を適合条件式(27)に代入し、仮想応力関数  $\delta F$  を求めると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \delta F = & \frac{\lambda^2}{4h} w_{mn} \delta w_{pq} \\ & \left\{ - \frac{(pn-qm)^4 \cos\left\{\frac{(p-m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q-n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \right. \\ & - \frac{(pn-qm)^4 \cos\left\{\frac{(p+m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q+n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \\ & + \frac{(pn+qm)^4 \cos\left\{\frac{(p+m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q-n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ & \left. + \frac{(pn+qm)^4 \cos\left\{\frac{(p-m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q+n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \right\} \end{aligned} \quad (30)$$

ここで、式(12)と式(20)より  $N_x$ 、 $N_y$ 、 $N_{xy}$  を求め、さらに式(26)と式(30)より  $\delta N_x$ 、 $\delta N_y$ 、 $\delta N_{xy}$  を求める。これらを式(19)の  $w$ 、式(29)の  $\delta w$  を式(22)の第二変分  $\delta^2\Pi$  に代入し、二重積分すると安定判別式として次式を得る。

$$\begin{aligned} \delta^2\Pi = & \delta w_{pq}^2 \left[ \frac{\lambda^4 w_{mn}^2}{128b^2 h} \right. \\ & \times \left\{ - \frac{(pn-qm)^4 \delta \delta_p \delta \delta_q}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \right. \\ & - \frac{(pn-qm)^4}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \\ & + \frac{(pn+qm)^4 \delta \delta_q}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ & + \frac{(pn+qm)^4 \delta \delta_p}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \left. \right\} \\ & + \frac{\pi^4 w_{mn}^2}{128b^2 h} \left( \frac{m^2 p^2}{H_{11} \lambda^3} \delta_p + \frac{n^2 q^2}{H_{11}} \lambda \delta_q \right) - \sigma_x \left\{ \frac{(p\pi)^2}{8\lambda} h + k_y \frac{(q\pi)^2}{8} \lambda h \right\} \\ & + \frac{1}{8} \frac{(p\pi)^4}{b^2 \lambda^3} \left\{ D_{11} + 2\lambda^2 \left( \frac{q}{p} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \lambda^4 D_{22} \left( \frac{q}{p} \right)^4 \right\} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \delta \delta_p = & 2 \quad (p=m \text{ の時}) & \delta \delta_q = & 2 \quad (q=n \text{ の時}) \\ & = 1 \quad (p \neq m \text{ の時}) & & = 1 \quad (q \neq n \text{ の時}) \\ \delta_p = & 1 \quad (p=m \text{ の時}) & \delta_q = & 1 \quad (q=n \text{ の時}) \\ & = 0 \quad (p \neq m \text{ の時}) & & = 0 \quad (q \neq n \text{ の時}) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

これより、 $p$ 、 $q$  を変化させることにより安定判別を行う。

### 4. 数値計算例と解析結果の検討

炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材の対称積層板について数値計算を実行した. その基本弾性定数(繊維容積含有率  $V_f = 60\%$ )は, 平均化近似解法により計算され, 実験でも確認された値である<sup>16)</sup>.

$$\left. \begin{aligned} E_L &= 137(\text{GPa}), E_T = 8.17(\text{GPa}), G_{LT} = 4.75(\text{GPa}) \\ \nu_L &= 0.316, \nu_T = 0.0189 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

数値計算例として, *M.P.Nemeth*<sup>12)</sup>が示す面内剛性が等方性となる対称積層板を扱い, 二軸圧縮荷重比  $k_y$  の変化に対し, 一次座屈と二次座屈の結果を Fig.3(a)~(c)にそれぞれ示す. ここで, (a)は二軸圧縮荷重比  $k_y=0.0$ , (b)は  $k_y=0.5$ , (c)は  $k_y=1.0$  の場合を示す. ここで座屈値を無次元化し, 無次元座屈係数  $K$  を  $K = \bar{N}_x b^2 / \pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}$  とし, 一次座屈値を  $K_p$ , 二次座屈値を  $K_s$  とする.

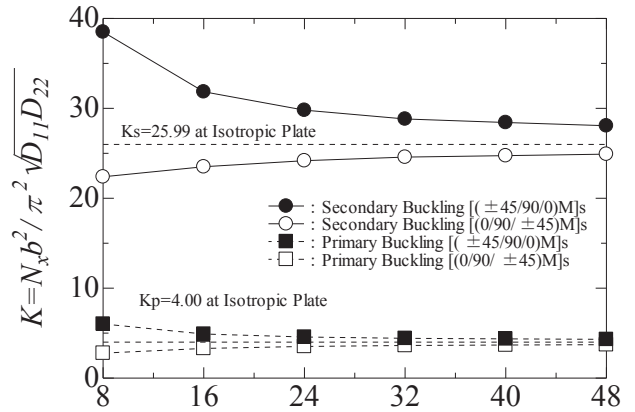
図中において, ●は  $[\pm 45/90/0]_{sym}$  の二次座屈値, ○は  $[0/90/\pm 45]_{sym}$  の二次座屈値, ■は  $[\pm 45/90/0]_{sym}$  の一次座屈値, □は  $[0/90/\pm 45]_{sym}$  の一次座屈値である. ここで,  $[\pm 45/90/0]_{sym}$  の積層構成は最外層と2層目の積層角が  $\pm 45^\circ$ , 3層目が  $90^\circ$ , 4層目が  $0^\circ$  を示す. そして, 積層数は8Mの倍数からなり, 例えば, 8M=8は  $[\pm 45/90/0]_{sym}$ , 8M=16は  $[\pm 45/90/0/\pm 45/90/0]_{sym}$  という積層構成となる. なお, 一軸圧縮負荷時における等方性薄板の一次および二次座屈は邊・植村<sup>8)</sup>により明らかにされており, Fig.3の(a)~(c)の図中に(a)一次座屈  $K_p=4.00$ , 二次座屈  $K_s=25.99$ , (b)一次座屈  $K_p=2.67$ , 二次座屈  $K_s=24.18$ , (c)一次座屈  $K_p=2.00$ , 二次座屈  $K_s=19.06$  を破線でそれぞれ示す.

さらに, 積層構成および積層数が各座屈値へ与える影響を評価するために,  $[0/90/\pm 45]_{sym}$  と  $[\pm 45/90/0]_{sym}$  の積層数を8M=8から48まで変化させ, さらに二軸圧縮荷重比  $k_y$  を0, 0.5および1.0へ変化させた時の一次座屈値および二次座屈値をそれぞれ Table1 に示す. また, Table1 中において,  $k_y=0.0$  の時に発生する座屈値を基準とし, 二軸圧縮負荷時の座屈値の低下率を  $\Delta$  で表し, 以下で定義する.

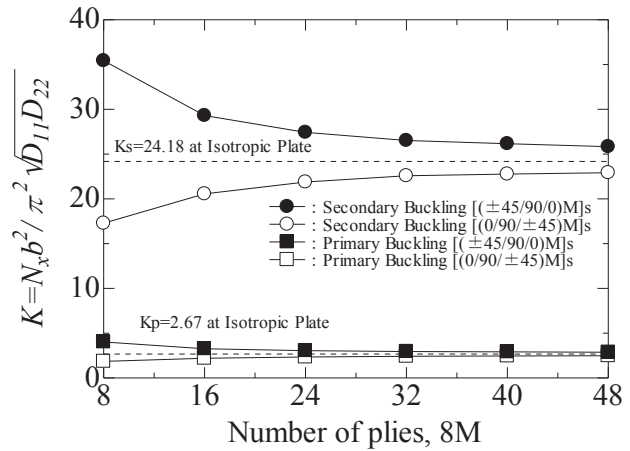
$$\Delta = \{ (K \text{ at } k_y=0.0) - (K \text{ at } k_y=0.5 \text{ or } 1.0) \} / (K \text{ at } k_y=0.0) \quad (34)$$

Fig.3の解析結果から, 対称積層板の場合, 同じ方向の層を積層した場合でも積層方法により, 曲げ剛性が異なるので, 座屈値への影響は小さくないことが判る. これは面内剛性および曲げ剛性は式(6)で定義しているように, 中央面に対して同じ方向の層を積層すれば面内剛性  $A_{ij}$  は中央面を境にして上下面で打ち消しあうので変化はないが, 曲げ剛性  $D_{ij}$  は変化し, 各座屈値へ影響を与えていることを意味する.

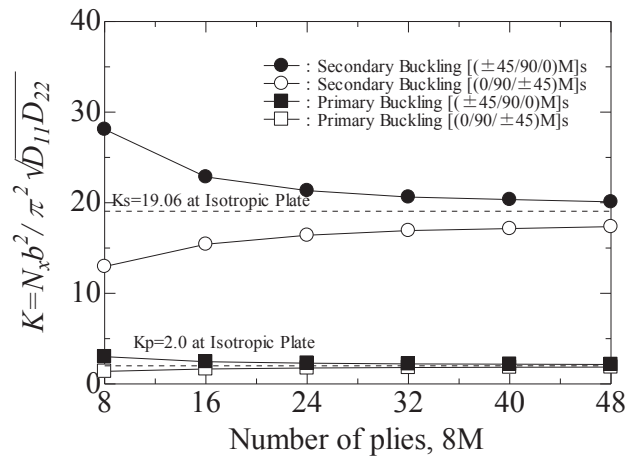
Table1 に各積層構成および二軸圧縮荷重比  $k_y$  に対する一次座屈値, 二次座屈値および座屈値の低下率  $\Delta$  の関係を示す. ここで, 積層構成の影響について考察すると, 積層構成が  $[0/90/\pm 45]_{sym}$  および  $[\pm 45/90/0]_{sym}$  に関し, 積層数の増加に伴い, 一次座屈値の低下率の変化はなく,  $k_y=0.5$  の場合で約33%低減し,  $k_y=1.0$  の場合では約50%の低減と



(a) Biaxial compressive load ratios  $k_y=0.0$



(b) Biaxial compressive load ratios  $k_y=0.5$



(c) Biaxial compressive load ratios  $k_y=1.0$

Fig.3 Relationship between  $K$  and number of plies, 8M of symmetrically laminated plates at biaxial compressive load ratios  $k_y=0, 0.5$  and  $1.0$ .

なる. さらに, 二次座屈値に関しては  $[0/90/\pm 45]_{sym}$  に着目すると8M=8で  $k_y=0.5$  の場合は  $\Delta=22.8\%$  の低下率であるが, 同一の二軸圧縮荷重比  $k_y=0.5$  で8M=48の場合では  $\Delta=8\%$  の低下率となる. さらに,  $k_y=1.0$  では8M=8の場合,  $\Delta=42.1\%$  に対し, 8M=48では  $\Delta=30.3\%$  となる. これにより, 積層数

Table1 Primary and secondary buckling stresses of symmetrically laminated plates at lamination constitution and biaxial compressive load ratios  $k_y=0.0, 0.5$  and  $1.0$ .

| Lamination Constitution    | Primary Buckling : $K_p$ |           |              |           |              | Secondary Buckling : $K_s$ |           |              |           |              |
|----------------------------|--------------------------|-----------|--------------|-----------|--------------|----------------------------|-----------|--------------|-----------|--------------|
|                            | $k_y=0.0$                | $k_y=0.5$ | $\Delta(\%)$ | $k_y=1.0$ | $\Delta(\%)$ | $k_y=0.0$                  | $k_y=0.5$ | $\Delta(\%)$ | $k_y=1.0$ | $\Delta(\%)$ |
| [0/90/ $\pm 45^\circ$ ] 8M |                          |           |              |           |              |                            |           |              |           |              |
| 8                          | 2.78                     | 1.85      | 33.5         | 1.39      | 50.0         | 22.39                      | 17.28     | 22.8         | 12.96     | 42.1         |
| 16                         | 3.30                     | 2.20      | 33.3         | 1.65      | 50.0         | 23.51                      | 20.56     | 12.5         | 15.42     | 34.4         |
| 24                         | 3.52                     | 2.34      | 33.5         | 1.76      | 50.0         | 24.18                      | 21.88     | 9.5          | 16.41     | 32.1         |
| 32                         | 3.63                     | 2.42      | 33.3         | 1.81      | 50.1         | 24.58                      | 22.58     | 8.1          | 16.93     | 31.1         |
| 40                         | 3.68                     | 2.45      | 33.4         | 1.84      | 50.0         | 24.74                      | 22.77     | 8.0          | 17.15     | 30.7         |
| 48                         | 3.72                     | 2.48      | 33.3         | 1.86      | 50.0         | 24.91                      | 22.92     | 8.0          | 17.36     | 30.3         |
| [ $\pm 45/90/0^\circ$ ] 8M |                          |           |              |           |              |                            |           |              |           |              |
| 8                          | 6.02                     | 4.02      | 33.2         | 3.01      | 50.0         | 38.50                      | 35.43     | 8.0          | 28.10     | 27.0         |
| 16                         | 4.90                     | 3.26      | 33.5         | 2.45      | 50.0         | 31.85                      | 29.31     | 8.0          | 22.85     | 28.3         |
| 24                         | 4.57                     | 3.05      | 33.3         | 2.29      | 49.9         | 29.80                      | 27.43     | 8.0          | 21.34     | 28.4         |
| 32                         | 4.42                     | 2.95      | 33.3         | 2.21      | 50.0         | 28.82                      | 26.52     | 8.0          | 20.63     | 28.4         |
| 40                         | 4.36                     | 2.91      | 33.3         | 2.18      | 50.0         | 28.43                      | 26.16     | 8.0          | 20.35     | 28.4         |
| 48                         | 4.31                     | 2.87      | 33.4         | 2.15      | 50.1         | 28.07                      | 25.83     | 8.0          | 20.10     | 28.4         |

の増加に伴い、曲げ剛性が板厚方向に対し均質化されるため、二次座屈値が収束しているものと考えられる。

一方、 $[\pm 45/90/0]_{sym}$  については、二軸圧縮荷重比  $k_y=0.5$  の場合、全ての積層数で  $\Delta=8.0\%$ 、 $k_y=1.0$  の場合で  $\Delta=27.0\sim 28.4\%$  程度で推移し、積層数の影響が非常に小さいことがわかる。

そして、二軸圧縮荷重比  $k_y$  を増加させると、積層構成に関係なく、二次座屈値は低下するが二次座屈値は一次座屈値と同じ低下率とならない。また、積層数が少ない積層構成の場合は二軸圧縮荷重比  $k_y$  の増加によって、二次座屈値が著しく低下することがあるため、対称積層においても注意を要する必要がある。

## 5. あとがき

本論文では、面内剛性が等方性となる対称積層板に二軸圧縮負荷を受ける際の二次座屈現象について、全ポテンシャルエネルギーの第二変分により安定判別法を用いることにより明らかにした。これより、一次座屈後の対称積層板の耐荷能力を明らかにし、二軸圧縮負荷および積層構成が二次座屈値に与える影響について解析的に明らかにした。

### 参考文献

- 1) 福永久雄, 関根英樹, 佐藤正喜, 飯野明: 対称積層板の圧縮座屈特性に及ぼす曲げ・ねじりカップリング効果, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.59, No.566 (1993), 2343.
- 2) 小林繁夫, 住原清秀, 紀平正知: CFRP 積層板の圧縮座屈強度 (第 1 報), 日本航空宇宙学会誌, Vol.28, No.317(1980), 293.
- 3) 住原清秀, 小林繁夫: CFRP 積層板の圧縮座屈強度 (第 2 報), 日本航空宇宙学会誌, Vol.29, No.327(1981), 216.

- 4) T.Tuttle, P.Singhatanadgid and G.Hinds: Buckling of Composite Panels Subjected to Biaxial Loading, Society for Experimental Mechanics Vol.39, No.3 (1999), 191.
- 5) G.J.Turvey and I.H.Marshall: Buckling and Postbuckling of Composite Plates (Chapman & Hall, London, 1995).
- 6) F.Bloom and D.Coffin: Handbook of Thin Plate Buckling and Postbuckling (Chapman & Hall London, 2001).
- 7) 粕谷平和, 康井義明: 軸圧縮を受ける繊維強化積層板の座屈後の挙動, 東海大学紀要工学部, 1981(2), 81.
- 8) 邊吾一, 植村益次: 一軸圧縮を受ける薄板の二次座屈現象の研究, 日本機械学会論文集, Vol.43, No.372(1977), 2818.
- 9) T. Nakamura and K. Uetani: The secondary buckling and post-secondary buckling behavior of rectangular plates, Int. J Mech. Sci. No.21(1979), 265.
- 10) N.Tiwari and M.W.Hyer: Secondary Buckling of Compression-Loaded Composite Plates, AIAA Journal, Vol.40, No.10 (2002), 2120.
- 11) 田村雄一, 森本卓也, 川村隆介, 大多尾義弘, 谷川義信: 二軸圧縮荷重を受ける傾斜機能薄膜の二次座屈挙動, 日本機械学会 2007 年次大会講演論文集 (2007), 265.
- 12) Michael P.Nemeth: Importance of Anisotropy on Buckling of Compression-Loaded Symmetric Composite Plates, AIAA Journal, Vol.24, No.11(1986), 1831.
- 13) 粕谷平和, 根本圭一, 遠藤翔, 菊川久夫: 面内圧縮荷重を受ける対称積層板の座屈後解析, 日本設計工学会誌, Vol.46, No.8(2011), 454.
- 14) H. Kasuya and S. Tsunoi: Buckling Strength of Cross-ply Laminated Plates under Biaxial Compression, Mater. Sci. Res. Int., Vol.2, No.2 (1996), 99.
- 15) R.M. Jones: "Mechanics of Composite Materials", Chap.4, McGraw-Hill, New York (1975).
- 16) 植村益次, 山田直樹: 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24, No.257(1975), 156.