

初期たわみを有する対称積層板の二軸圧縮負荷による 座屈後挙動に及ぼす積層構成の影響

根本 圭一*¹ 小比賀 透*² 菊川 久夫*³ 森山 裕幸*⁴ 粕谷 平和*⁴

Effect of lamination Constitution on Post-Buckling Behavior of Symmetrically Laminated Plates with Initial Deflection Subjected to Biaxial Compressive Loads

by

Keiichi NEMOTO*¹, Tooru KOHIGA*², Hisao KIKUGAWA*³, Hiroyuki MORIYAMA
and Hirakazu KASUYA*⁴

(Received on Mar. 30, 2013 and accepted on Jul. 11, 2013)

Abstract

Advanced composite materials including those using carbon fiber reinforced plastic (CFRP) are being increasingly used in engineering applications including aerospace, mechanical, marine and automotive engineering because they offer excellent properties such as high specific strength and specific stiffness. Many researchers have examined the post-buckling behaviors of thin laminated plates under uniaxial compression, but few have examined the secondary buckling phenomenon for a thin laminated plate that occurs as the load is increased further. In this paper, the second variation of total potential energy is used to determine the stability condition of carbon-epoxy symmetrically laminated plates with initial deflection under biaxial compressive loads that are simply supported along four edges. The necessity of secondary buckling is proven analytically, and the effects of various factors including lamination constitution, biaxial compressive loads ratio and initial deflection are clarified.

Keywords: Structural Analysis, Composite Materials, CFRP, Secondary Buckling, Symmetrically Laminates, Biaxial Compressive Loads, Initial Deflection

1. まえがき

近年、構造物の軽量化、高速化にともない、比強度、比剛性の高い繊維強化プラスチック材、特に炭素繊維からなる高性能繊維強化プラスチック材は、薄肉軽量構造材として、航空宇宙をはじめとする各分野で数多く使用されている。このように、構造物が薄肉軽量化される場合には、座屈が構造設計基準として用いられるため、その挙動を解明することは重要であると考えられ、積層構成によっては面内変形と面外変形が連成するカップリング効果が発生し、座屈荷重¹⁾や固有振動数²⁾を低下させる原因となるため、できる限りカップリング項が少なくなる積層構成が選ばれている。そのため、通常、対称バランス積層が用いられていることが多く、また、製造上の問題と実験データの不足から 0° 、 $\pm 45^\circ$ 、 90° の限定された繊維配向角の組合せとなる場合がある。

面内圧縮負荷を受ける薄板は座屈後も荷重低下がなく耐荷能力があるため、一次座屈後も使用することが可能であることは多くの研究者によって明らかにされている通りである^{3),4)}。しかしながら、一次座屈後さらに荷重を加えても、いつまでも安定状態が続くわけではなく、ある荷重において不安定となり、耐荷剛性がさらに低下する二次座屈現象⁵⁾が起り、著者らは二軸圧縮負荷を受ける複合材料積層薄板の二次座屈現象を解析的手法によって明らかにした^{6),7)}。

また、著者らは *M.P.Nemeth*⁹⁾が提案した $[0/90/\pm 45]_{sym}$ 及び $[\pm 45/0/90]_{sym}$ の対称積層板に着目し、その対称積層板の二次座屈値をそれぞれ算出し、積層構成が二次座屈値に与える影響を理論的に考察した⁸⁾。

本論文では前報^{6)~8)}の解析手法を応用し、 $[0/90/\pm 45]_{sym}$ 及び $[\pm 45/0/90]_{sym}$ の対称積層板が初期たわみを有する状態で、且つ二軸圧縮負荷を受けた場合を例に取り、全ポテンシャルエネルギーの第2変分値により一次座屈後の平衡状態の安定判別を行う方法を用いて明らかにする。また、二次座屈現象に与える諸因子である初期たわみおよび二軸圧縮荷重比の影響を解析的手法により明らかにする。なお、初期たわみ量は既報⁷⁾と同様、板厚の10%を最大値として取り扱った。

*1: 横浜ゴム株式会社 航空部品技術部

*2: 工学研究科機械工学専攻 修士課程

*3: 工学部医用生体工学科 教授

*4: 工学部動力機械工学科 教授

2. 座屈解析法

2.1 対称積層板の基礎式

Fig.1 に示すような対称積層板が面内圧縮荷重 \bar{N}_x , \bar{N}_y を受ける場合を考え、中央面の変位を u , v , w とする。ここで、 w_0 を初期たわみと仮定すると、面内ひずみ成分 ε_x , ε_y , γ_{xy} , 曲率成分 κ_x , κ_y , κ_{xy} と変位 u , v , w との関係は座屈後の安定問題を解析するために、二次の微小項を考慮した有限変形理論を用いると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

また、面内ひずみ成分 ε_x , ε_y , γ_{xy} と平面応力成分 σ_x , σ_y , τ_{xy} との関係は、弾性域に限定すると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \sigma_x / E - \nu \sigma_y / E \\ \varepsilon_y &= \sigma_y / E - \nu \sigma_x / E \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G \end{aligned} \right\} (3)$$

ここで、本論文では積層角 θ が 0° , $\pm 45^\circ$, 90° からなる対称積層板で面内が等方性となるものを対象としているため、縦弾性係数を E ($E_x = E_y$), せん断弾性係数を G (G_{xy}), さらにポアソン比を ν ($\nu_x = \nu_y$) と整理することができる。板厚 h であるときの単位幅当りの面内力 N_x , N_y , N_{xy} は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] \right] \\ N_y &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \right] \\ N_{xy} &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz = Gh \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \right\} (4)$$

また、本解析モデルにおいては中央面に対して、対称バランスされた積層を考えているので、その時の合応力成分と面内ひずみ成分、合モーメント成分と曲率成分との関係は次式で表される。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5a)$$

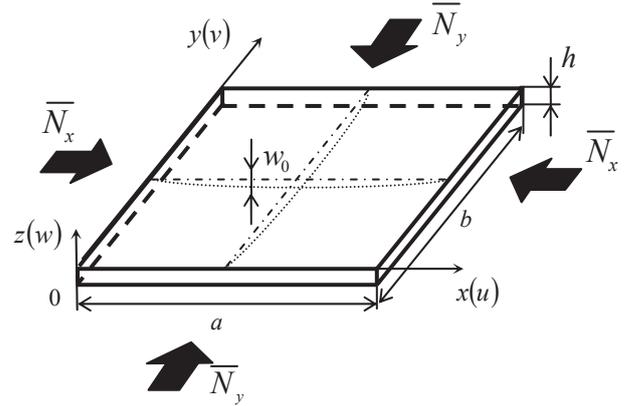


Fig.1 Configuration and coordinates of symmetrically laminated plates with initial deflection under biaxial compressive loads.

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5b)$$

ここで、 A_{ij} は伸張剛性マトリックス、 D_{ij} は曲げ剛性マトリックスであり、それぞれ、異方性材の繊維方向、繊維に直角方向の縦弾性係数 E_L , E_T , ポアソン比 ν_L , ν_T , せん断弾性係数 G_{LT} および積層角 θ が与えられると求められる¹⁰⁾。なお、添え字の L は繊維の長手方向“Longitudinal”, T は繊維と直角方向“Transverse”の頭文字をそれぞれ意味する。

ただし、曲げ-ねじりカップリング剛性項 D_{16} , D_{26} を考慮した積層薄板の座屈後解析は非常に困難であり、この曲げ-ねじりカップリング剛性項が座屈強度に与える影響は無次元異方性パラメータ γ , δ を用いて評価することができる⁹⁾。

$$\gamma = \frac{D_{16}}{\sqrt{D_{11}^3 D_{22}}}, \quad \delta = \frac{D_{26}}{\sqrt{D_{11} D_{22}^3}} \quad (6)$$

そして、 γ , δ の値がそれぞれ 0.2 より小さい積層板では曲げ-ねじりカップリング効果は無視できる⁹⁾。よって、本論文では γ , δ の値が共に 0.2 以下の積層構成について取り扱う。

圧縮荷重を受ける対称積層板の面内変形エネルギー、曲げエネルギーをそれぞれ U_m , U_b とすると

$$\left. \begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \\ U_b &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b (M_x \kappa_x + M_y \kappa_y + M_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \end{aligned} \right\} (7)$$

であり、変位により圧縮荷重を受ける場合の全ポテンシャルエネルギーは

$$\Pi = U_m + U_b \quad (8)$$

である。式(8)に式(3), (5)および(7)を代入すると、

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{h} \left\{ \frac{N_x^2}{E} - \frac{2\nu}{E} N_x N_y + \frac{N_y^2}{E} + \frac{N_{xy}^2}{G} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (9) \end{aligned}$$

となる。

2.2 平衡方程式と適合方程式

対称積層板の面内および板厚方向の平衡方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = N_x \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right\} + N_y \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \right\} + N_{xy} \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} \quad (11)$$

ここで、面内平衡方程式(10)を満足するように、応力関数 F を次式のように定義する。

$$N_x = h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (12)$$

上式の応力関数 F を用いると板厚方向の平衡方程式は次式となる。

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = h \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} \quad (13)$$

一方、適合方程式は式(1)から u , v を消去すると、

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (14)$$

となり、さらに応力関数を用いて示すと次式のように示される。

$$H_{11} \left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \right) + 2(H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h} \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \quad (15)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} H_{11} &= A_{11} A_{66} / H, & H_{12} &= -A_{12} A_{66} / H \\ H_{66} &= (A_{11}^2 - A_{12}^2) / H, & H &= A_{11}^2 A_{66} - A_{12}^2 A_{66} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

である。

結局、一次座屈後の挙動解析では、一次座屈後の平衡方程式と適合方程式の応力関数とたわみ波形に関する連立偏微分方程式を与えられた境界条件の下で解けばよいが、厳密解を得ることは極めて難しいので、以下近似的に解くことにする。

3. 一次座屈後の挙動解析

3.1 一次座屈後の挙動

周辺単純支持の場合、一次座屈後の板厚方向の面外境界条件は式(17)で示される。

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で } w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\ y=0, b \text{ で } w &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

面内境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で } u &\text{ は } y \text{ 軸に沿って一定で} \\ &\int_0^b \bar{N}_x dy = -\bar{N}_x b, \quad N_{xy} = 0 \\ y=0, b \text{ で } v &\text{ は } x \text{ 軸に沿って一定で} \\ &\int_0^a \bar{N}_y dx = -\bar{N}_y a, \quad N_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

である。

板厚方向の面外境界条件を満足するように、一次座屈後のたわみ波形 w , 初期たわみ w_0 を板の中央点について対称および逆対称モードの2項近似表示する。

$$\left. \begin{aligned} w &= w_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) + w_{21} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \\ w_0 &= c_{11} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) + c_{21} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

ここで、 c_{11} , c_{21} は初期たわみの大きさを表している。

上式を式(15)の適合方程式へ代入し、面内境界条件を満足する応力関数 F を求めると、

$$F = \frac{1}{2h\lambda^2} (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11}) \left\{ \frac{\lambda^4}{16H_{11}} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16H_{11}} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right\} + \frac{2}{h\lambda^2} (w_{21}^2 + 2w_{21}c_{21}) \left\{ \frac{\lambda^4}{256H_{11}} \cos\left(\frac{4\pi x}{a}\right) + \frac{1}{16H_{11}} \cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) \right\} - \frac{1}{4h\lambda^2} (w_{11}w_{21} + w_{11}c_{21} + w_{21}c_{11}) \left[\frac{\lambda^4}{H_{11}} \left\{ \frac{1}{9} \cos\left(\frac{3\pi x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \right\} - \frac{\lambda^4 \cos(3\pi x/a) \cos(2\pi y/b)}{81H_{11} + 36(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} + \frac{\lambda^4 9 \cos(\pi x/a) \cos(2\pi y/b)}{H_{11} + 4(2H_{12} + H_{66})\lambda^2 + 16H_{11}\lambda^4} \right] - \frac{\sigma_x y^2}{2} - \frac{\sigma_y x^2}{2} \quad (20)$$

ここで、 $\lambda (=a/b)$ は積層板のアスペクト比である。さらに、板厚方向の平衡方程式(13)へ代入し、Galerkin法を適用すると、応力とたわみに関する三次元方程式が得られ、Newton-Raphson法を適用することで w_{11} , w_{21} がそれぞれ求められる。また、対称積層板の中央面での x 軸

方向の平均軸縮み ε_{mx} は次式のように示される.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{mx} &= -\frac{1}{a} \int_0^a \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{a} \int_0^a \left\{ \varepsilon_x - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial x} \right\} dx \\ &= (H_{11} + H_{12}k_y)\sigma_x h + \frac{\pi^2}{8a^2} (w_{11}^2 + 2w_{11}c_{11} + 4w_{21}^2 + 8w_{21}c_{21}) \quad (21)\end{aligned}$$

3. 2 一次座屈後の安定判別法

平衡方程式はエネルギー停留原理により, 全ポテンシャルエネルギー Π の第一変分 $\delta\Pi$ を零と等価しても求められるが, 平衡方程式の安定判別は次に示す Π の第二変分の正負から議論できる.

第二変分は次式で与えられる.

$$\begin{aligned}\delta^2\Pi &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[\frac{1}{h} \left\{ \frac{\delta N_x^2}{E} + \frac{\delta N_y^2}{E} - \frac{2\nu}{E} \delta N_x \delta N_y + \frac{\delta N_{xy}^2}{G} \right\} \right. \\ &+ \left. \left\{ N_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right\} \right. \\ &+ \left. \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (22)\end{aligned}$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned}\delta N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu \left\{ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} \right] \\ \delta N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \nu \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right\} \right] \\ \delta N_{xy} &= Gh \left[\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] \quad (23)\end{aligned}\right\}$$

である. 式(22)において, $\delta^2\Pi > 0$ なら安定となり, $\delta^2\Pi = 0$ なら中立平衡, $\delta^2\Pi < 0$ なら不安定である. $\delta^2\Pi$ の正負を決定するためには, 適切な仮想変位を想定すればよいが, そのままでは無限数存在することから, 安定判別は困難である. 従って, $\delta^2\Pi$ が極値をとるように仮想変位を求め, 安定判別を実行する. 仮想変位に関する境界条件の下に $\delta^2\Pi$ を x , y , z 軸方向のそれぞれの微小擾乱仮想変位 δu , δv , δw について変分し, 次式のような平衡方程式を得る.

$$\frac{\partial \delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \delta N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \delta N_y}{\partial y} = 0 \quad (24)$$

$$\begin{aligned}D_{11} \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 \delta w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 \delta w}{\partial y^4} \\ = \delta N_x \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \right\} + 2\delta N_{xy} \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y} \right\} + \delta N_y \left\{ \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} \right\} \\ + N_x \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \quad (25)\end{aligned}$$

面内平衡方程式(24)を満足させる仮想応力関数 δF を導入し, 次式のように定義する.

$$\delta N_x = h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial y^2}, \quad \delta N_y = h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x^2}, \quad \delta N_{xy} = -h \frac{\partial^2 \delta F}{\partial x \partial y} \quad (26)$$

また, 一次座屈後の面外平衡方程式へ代入し, δu , δv を消去すると仮想変位に対する適合方程式を得る.

$$\begin{aligned}H_{11} \frac{\partial^4 \delta F}{\partial x^4} + (2H_{12} + H_{66}) \frac{\partial^4 \delta F}{\partial x^2 \partial y^2} + H_{11} \frac{\partial^4 \delta F}{\partial y^4} \\ = \frac{1}{h} \left\{ 2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right\} \quad (27)\end{aligned}$$

微小擾乱仮想変位 δu , δv , δw および仮想面内力 δN_x , δN_y , δN_{xy} が満足すべき境界条件は次式で表される.

$$\left. \begin{aligned}x=0, a \quad \text{で} \quad \delta w=0, \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}=0, \delta u=0, \delta N_{xy}=0 \\ y=0, b \quad \text{で} \quad \delta w=0, \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2}=0, \delta v=0, \delta N_{xy}=0\end{aligned}\right\} \quad (28)$$

また, 上式の境界条件を満足するように, 微小擾乱仮想変位 δw を次式のように定義する.

$$\delta w = \delta w_{pq} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{q\pi y}{b}\right) \quad (29)$$

ここで, p , q は一次座屈後の不安定現象が起こった場合の x , y 方向の微小擾乱半波数であり, 正整数であるが, 平衡状態での主たわみ波形と同一の場合は式(28)の δu , δv を満足しないため除外する. 以上の関係式を適合条件式(27)に代入し, 仮想応力関数 δF を求めると次式のようなようになる.

$$\begin{aligned}\delta F &= \frac{\lambda^2}{4h} \delta w_{pq} (w_{11} + c_{11}) \\ &\times \left[\frac{\cos\left\{\frac{(1+p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1+q)\pi y}{b}\right\} (p-q)^2}{H_{11}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1+q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1+q)^4} \right. \\ &+ \frac{\cos\left\{\frac{(1+p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1-q)\pi y}{b}\right\} (p+q)^2}{H_{11}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1-q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1-q)^4} \\ &+ \frac{\cos\left\{\frac{(1-p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1+q)\pi y}{b}\right\} (p+q)^2}{H_{11}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1+q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1+q)^4} \\ &\left. - \frac{\cos\left\{\frac{(1-p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1-q)\pi y}{b}\right\} (p-q)^2}{H_{11}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1-q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1-q)^4} \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\lambda^2}{4h} \delta w_{pq}(w_{21} + c_{21}) \\
 & \times \left[\frac{\cos\left\{\frac{(2+p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1+q)\pi y}{b}\right\} (p-2q)^2}{H_{11}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1+q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1+q)^4} \right. \\
 & + \frac{\cos\left\{\frac{(2+p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1-q)\pi y}{b}\right\} (p+2q)^2}{H_{11}(1+p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1+p)^2(1-q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1-q)^4} \\
 & + \frac{\cos\left\{\frac{(2-p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1+q)\pi y}{b}\right\} (p+2q)^2}{H_{11}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1+q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1+q)^4} \\
 & \left. - \frac{\cos\left\{\frac{(2-p)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(1-q)\pi y}{b}\right\} (p-2q)^2}{H_{11}(1-p)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(1-p)^2(1-q)^2 + \lambda^4 H_{11}(1-q)^4} \right] \quad (30)
 \end{aligned}$$

ここで、式(12)と式(20)よりそれぞれの合応力成分 N_x , N_y , N_{xy} を求め、次に式(26) と式(30)より仮想応力成分 δN_x , δN_y , δN_{xy} を求め、さらに式(19)の w , 式(29)の δw を式(22)の第二変分 $\delta^2 \Pi$ に代入し、二重積分すると安定判別式を得る。

4. 数値計算例と解析結果の検討

炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材の対称バランス積層板について数値計算を実行した。その基本弾性定数(繊維容積含有率 $V_f = 60\%$)は、平均化近似解法により計算され、実験でも確認された値である¹¹⁾。

$$\left. \begin{aligned} E_L &= 137(\text{GPa}), E_T = 8.17(\text{GPa}), G_{LT} = 4.75(\text{GPa}) \\ \nu_L &= 0.316, \nu_T = 0.0189 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

数値計算例として、*M.P.Nemeth*⁹⁾が示す $[\pm 45/0/90]_{\text{sym}}$ および $[0/90/\pm 45]_{\text{sym}}$ の積層構成で積層数を $N=48$ とし、**Fig.2** に $\lambda (=a/b)=1.0$, 二軸圧縮荷重比 $k_y=0, 0.5, 1.0$ と変化させ、初期たわみが無い場合の無次元平均軸圧縮応力 $K (= \bar{N}_x b^2 / \pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}})$ と x 軸方向の無次元平均軸縮み ϵ_{mx} の関係を示し、図中の K_p は一次座屈値, K_s は二次座屈値を示し、座屈時の x, y 方向の半波数 m, n と微小擾乱半波数 p, q の値を括弧内に示す。

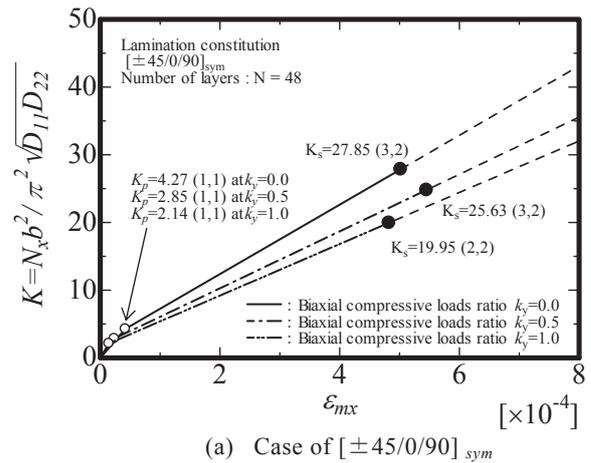
Fig.3 に $[\pm 45/0/90]_{\text{sym}}$, **Fig.4** に $[0/90/\pm 45]_{\text{sym}}$ の積層構成で初期たわみを考慮した場合の無次元平均軸圧縮応力 K と x 軸方向の平均軸縮み ϵ_{mx} の関係について、初期たわみと二軸圧縮荷重比 k_y の影響を見るために、一軸圧縮負荷 ($k_y=0$) の場合を(a)に、二軸圧縮負荷 $k_y=0.5$ の場合を(b), $k_y=1.0$ の場合を(c)にそれぞれ示す。ここで、 c_{11}, c_{21} は対称モードと非対称モードによる初期たわみの大きさを表している。なお、初期たわみ $c_{11}=0.1$ は x, y 軸方向にそれぞれ1半波で、その大きさは板厚の10%の場合を示す。図中において、実線は初期たわみが無い場合で一点鎖線は $c_{11}=0.05, c_{21}=0.0$, 二点鎖線は初期たわみが $c_{11}=0.10, c_{21}=0.0$ における挙動をそれぞれ示す。

Fig.5 に *M.P.Nemeth*⁹⁾が示す $[\pm 45/0/90]_{\text{sym}}$ および $[0/90/\pm$

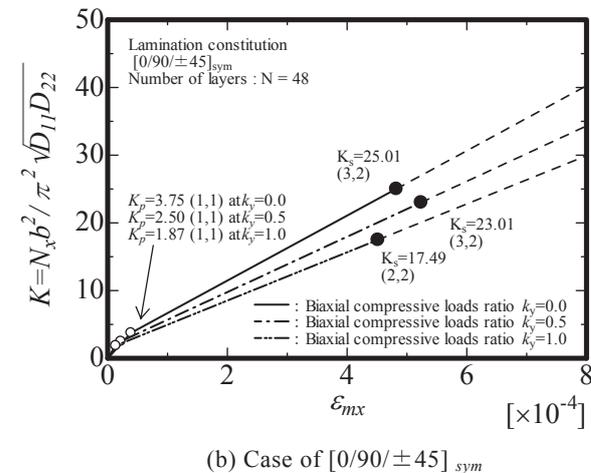
$45]_{\text{sym}}$ の積層構成について、初期たわみ $c_{11}=0.10, c_{21}=0.00$ とし積層数を $N=8$ から48まで変化させ、さらに二軸圧縮荷重比 $k_y=0, 0.5, 1.0$ と変化させ、各図において●は $k_y=0$, ○は $k_y=0.5$, □は $k_y=1.0$ の場合の二次座屈値をそれぞれ示す。

Fig.2 より、二次座屈値は一次座屈値に比べ数倍大きな値となっていることから、一次座屈後もかなりの耐荷能力があると考えられる。一次座屈後の剛性が一次座屈前の剛性に比べ低いことは、一次座屈前後で傾きが異なることより示され、また、それらの傾きの大きさは一次座屈後の半波数の影響を大きく受けるものと考えられる。

Fig.3 および **Fig.4** において、 $w_{11}>0$ は初期たわみの方向にたわんで座屈する場合のみを示している。本論文で取り扱う対称積層正方形板では、一次座屈時の x, y 軸方向に発生する座屈半波数がそれぞれ1半波となる。本論文では紙面の都合上割愛したが w_{21} も考慮して解析を実施したものの、結果として、 w_{21} の影響すなわち c_{21} が二次座屈へ与える影響は極めて小さいことを確認している。

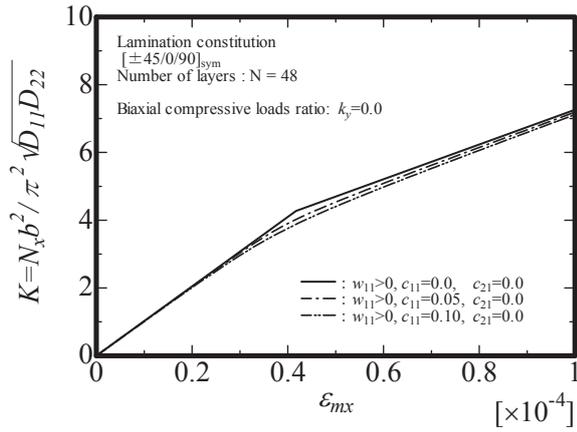


(a) Case of $[\pm 45/0/90]_{\text{sym}}$

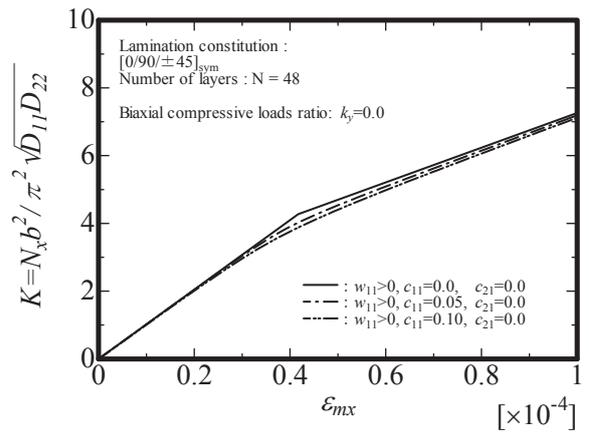


(b) Case of $[0/90/\pm 45]_{\text{sym}}$

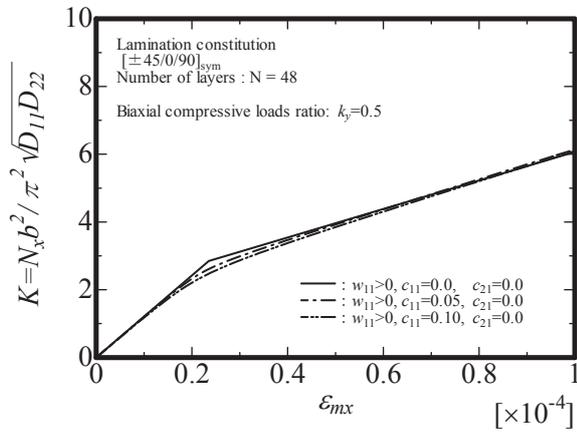
Fig.2 Relationship between K and axial compressive shortening ϵ_{mx} at biaxial compressive loads ratio $k_y=0, 0.5$ and 1.0 without initial deflection c_{11} and c_{21} .



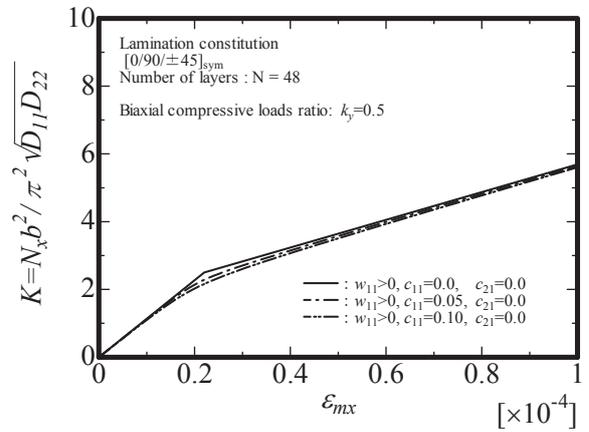
(a) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0$



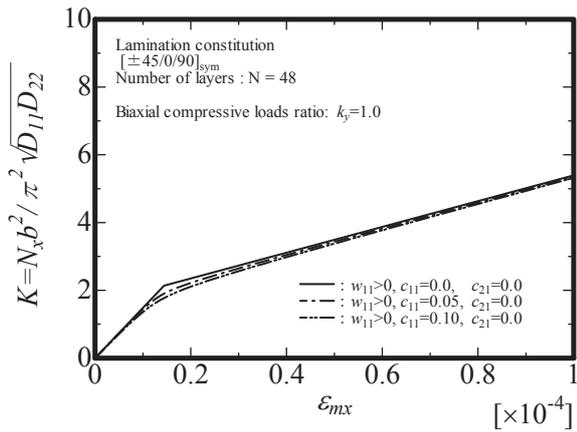
(a) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0$



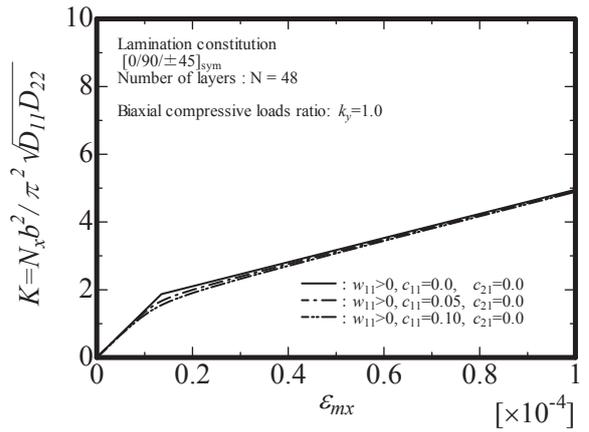
(b) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.5$



(b) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.5$



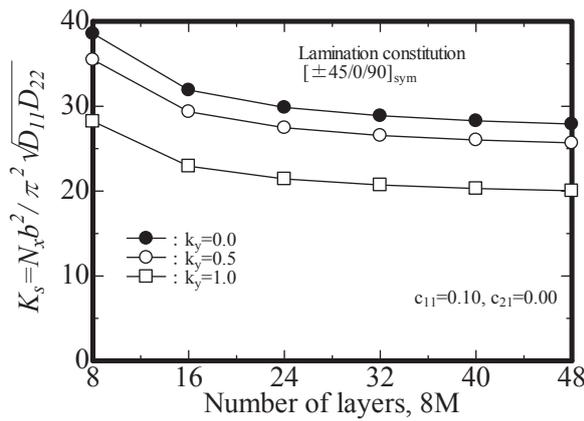
(c) Biaxial compressive loads ratio $k_y=1.0$



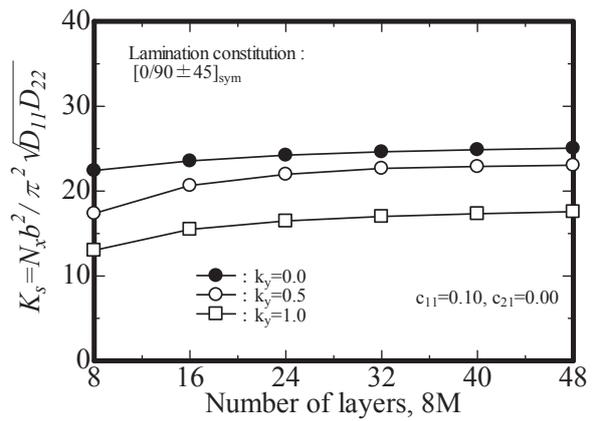
(c) Biaxial compressive loads ratio $k_y=1.0$

Fig.3 Relationship between K and ϵ_{mx} of symmetrically laminated plates with initial deflection, lamination constitution $[\pm 45/0/90]_{\text{sym}}$, number of layers $N=48$ at biaxial compressive loads ratio $k_y=0, 0.5$ and 1.0 .

Fig.4 Relationship between K and ϵ_{mx} of symmetrically laminated plates with initial deflection, lamination constitution $[0/90/\pm 45]_{\text{sym}}$, number of layers $N=48$ at biaxial compressive loads ratio $k_y=0, 0.5$ and 1.0 .



(a) Lamination constitution [±45/0/90]



(b) Lamination constitution [0/90/±45]

Fig.5 Relation between secondary buckling K_s and number of layers, 8M at initial deflection $c_{11}=0.10$, $c_{21}=0.00$ and biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0, 0.5$ and 1.0 .

Fig.5 より，二軸圧縮荷重比 k_y を増加させると，積層構成および積層数に関係なく，二次座屈値は低下する。そして，初期たわみが無い一軸圧縮負荷の一次座屈⁹⁾および二次座屈⁸⁾と同様に $[\pm 45/0/90]_{sym}$ の積層構成の方が $[0/90/\pm 45]_{sym}$ より高い座屈値を得る。積層構成の影響により，二軸圧縮荷重比 k_y の増加率と二次座屈の低下率は線形的には変化はしないが積層数の増加に伴い，面外剛性が均質化していくので座屈後の挙動，すなわち二次座屈値は一定値に漸近する。

5. あとがき

本論文では，初期たわみ有し，積層角が $0^\circ, \pm 45^\circ, 90^\circ$ からなる対称積層板に二軸圧縮荷を受けた際の二次座屈現象について，全ポテンシャルエネルギーの第二変分により安定判別法を用いることにより明らかにした。これより，一次座屈後の対称積層板の耐荷能力を明らかにし，二軸圧縮荷重および初期たわみが二次座屈値に与える影響について解析的に示した。特に初期たわみの大きさに関係なく，二軸圧縮荷重比 k_y の増加に伴い，対称積層板の二次座屈値は低下するが，二次座屈値は二軸圧縮荷重比の増加に対し線形的な挙動を示さない。

参考文献

- 1) 福永久雄，関根英樹，佐藤正喜，飯野明：対称積層板の圧縮座屈特性に及ぼす曲げ・ねじりカップリング効果，日本機械学会論文集 A 編，Vol.59，No.566 pp2343-2349 (1993).
- 2) 小林繁夫，長島利夫：CFRP 積層円筒殻の振動特性，日本航空宇宙学会誌，Vol.34，No.389，pp332-339 (1986).

- 3) G.J.Turvey and I.H.Marshall: Buckling and Postbuckling of Composite Plates, Chapman & Hall, London(1995).
- 4) K.Nemoto, H.Kasuya, H.Kikugawa and T.Asaka : Post Buckling Behavior of Composite Laminated Plates with Initial Imperfections under Biaxial Compression, *Materials Transaction*, Vol.50, No.2, pp299-304(2009).
- 5) 邊吾一，植村益次：一軸圧縮を受ける薄板の二次座屈現象の研究，日本機械学会論文集，Vol.43，No.372，pp2818-2827(1977).
- 6) 粕谷平和，根本圭一，辻本真之：二軸圧縮荷を受けるアングルプライ積層矩形板の座屈強度，日本設計工学誌，Vol.43，No.10，pp562-568 (2008).
- 7) 根本圭一，粕谷平和，菊川久夫，小比賀透：初期たわみを考慮した複合材料積層平板の二軸圧縮座屈後の安定解析，日本金属学会誌，Vol.76，No.5，pp.302-308(2012).
- 8) 粕谷平和，根本圭一，遠藤翔，菊川久夫：面内圧縮荷を受ける対称積層板の座屈後解析，日本設計工学学会誌，Vol.46，No.8，pp454-460(2011).
- 9) Michael P.Nemeth, Importance of Anisotropy on Buckling of Compression-Loaded Symmetric Composite Plates, *AIAA Journal*, Vol.24, No.11 pp1831-1835 (1986).
- 10) R.M. Jones : "Mechanics of Composite Materials", Chap.4, McGraw-Hill, New York (1975).
- 11) 植村益次，山田直樹：炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数，材料，Vol.24，No.257，pp156-163 (1975).