

二軸圧縮負荷を受ける対称積層矩形板の 座屈後挙動に及ぼす積層構成の影響

根本 圭一^{*1} 菊川 久夫^{*2} 森山 裕幸^{*3} 粕谷 平和^{*3}

Effect of Lamination Constitution on Post-Buckling Behavior of Symmetrically Laminated Rectangular Plates Subjected to Biaxial Compressive Loads

by

Keiichi NEMOTO^{*1}, Hisao KIKUGAWA^{*2}, Hiroyuki MORIYAMA^{*3} and Hirakazu KASUYA^{*3}

(Received on Sep. 30, 2013 and accepted on Dec. 19, 2013)

Abstract

Advanced composite materials represented by carbon fiber reinforced plastic (CFRP) have been increasingly used in various engineering applications including aerospace, mechanical, marine, and automotive engineering because they have excellent properties such as high specific strength and specific stiffness. Postbuckling behaviors of thin laminated plates under uniaxial compression have been discussed by many researchers. However, little research has been performed on the secondary buckling phenomenon for thin laminated plate which occurs with further increase of load. In this paper, the stability condition of carbon-epoxy symmetrically laminated rectangular plates under biaxial compressive loads which are simply supported along four edges is determined, using the second variation of total potential energy. The necessity of secondary buckling is proven analytically, and the effects of various factors, such as lamination constitution, biaxial compressive loads ratio and plate aspect ratio, are clarified.

Keywords: Structural analysis, Composite materials, CFRP, Secondary buckling, Symmetrically-laminates, Biaxial compressive loads

1. まえがき

近年、構造物の軽量化、高速化にともない、高比強度、高比剛性の高い繊維強化プラスチック材、特に炭素繊維からなる高性能繊維強化プラスチック材は、薄肉軽量構造材として、航空宇宙をはじめとする各分野で数多く使用されている。このように、構造物が薄肉軽量化される場合には、座屈が構造設計基準として用いられるため、その挙動を解明することは工学上重要である。また、積層構成によっては面内変形と面外変形が連成するカップリング効果が発生し、座屈荷重^{1),2)}を低下させる原因となるため、できる限りカップリング項が少なくなる積層構成が選ばれている。そのため、通常、対称バランスト積層が用いられていることが多い。

対称バランスト積層構造では面内の伸張-せん断のカップリング剛性 A_{16} , A_{26} は生じないが、曲げ-ねじりカップリング剛性 D_{16} , D_{26} 項が発生する。しかしながら、有限の積層数においても無次元異方性パラメータを導入することで、曲げ-ねじりカップリング D_{16} , D_{26} 項が圧

縮座屈強度に与える影響を無視することができる積層構成を *M.P.Nemeth*³⁾が明らかにしている。さらにこの曲げ-ねじりカップリング項が無視できる積層構成に対して、面内圧縮を受ける対称バランスト積層板の最適設計⁴⁾が試みられている。

しかしながら、一次座屈後さらに荷重を加えても、いつまでも安定状態が続くわけではなく、ある荷重において不安定となり、耐荷剛性がさらに低下する二次座屈現象が起こる。従来の研究において、等方性材料からなる薄板の二次座屈現象^{5),6)}、特に *T. Nakamura* と *K. Uetani*⁶⁾ は板のアスペクト比に対し、一次座屈応力と二次座屈応力の相関関係を理論的に示し、一次座屈の座屈モードが変化したアスペクト比において、二次座屈値が不連続になることを解析的研究により明らかにしている。

著者らは前報^{7)~9)}において、面内圧縮を受ける異方性積層板の二次座屈特性を明らかにした。本論文では前報⁹⁾の解析手法を応用し、対称積層矩形板を例にとり、全ポテンシャルエネルギーの第2変分値により一次座屈後の平衡状態の安定判別を行う方法を用いて明らかにする。特に *M.P.Nemeth*³⁾が提案している積層構成を適用し、二軸圧縮荷重比ならびに板のアスペクト比をそれぞれ変化させた際の二次座屈値の挙動について系統的に示す。

*1: 横浜ゴム株式会社 航空部品技術部

*2: 工学部医用生体工学科 教授

*3: 工学部動力機械工学科 教授

2. 対称積層矩形板の一次座屈解析

Fig. 1 に示すような対称積層矩形板 (板幅 a , b , 板厚 h) が x, y 方向からの二軸圧縮負荷 \bar{N}_x, \bar{N}_y を受ける場合を考える. ここで, 一次座屈後の挙動解析をする前に積層矩形板のアスペクト比に対する一次座屈特性について示す.

2.1 一軸圧縮負荷を受ける場合

x 方向からの一軸圧縮負荷 \bar{N}_x のみを受ける対称積層矩形板の座屈荷重は以下のように求められる¹⁰⁾.

$$\bar{N}_x = \pi^2 \frac{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4}{\left(\frac{m}{a}\right)^2} \quad (1)$$

ここで, $D_{ij}(i, j=1, 2, 6)$ は次式で定義されるように対称積層板の曲げ剛性を示し, 異方性材の繊維方向, 繊維に直角方向の縦弾性係数 E_L, E_T , ポアソン比 ν_L, ν_T , せん断弾性係数 G_{LT} および積層角 θ が与えられると求められ¹¹⁾, Fig. 2 に示すように積層板は各層とも均質な直交異方性材の N 層からなり, k 番目の層は基準面から $h_k \sim h_{k+1}$ 間に存在する. なお, 添え字の L は繊維の長手方向 “Longitudinal”, T は繊維と直角方向 “Transverse” の頭文字をそれぞれ意味する. また, m, n は座屈時の x, y 方向の軸方向半波数をそれぞれ表す.

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (h_{k+1}^3 - h_k^3) \quad (2)$$

式(1)は $n=1$ の場合, 最小座屈荷重となる. 従って, 式(1)で $n=1$ と置き x 軸方向の座屈半波数 m について, 座屈荷重と矩形板のアスペクト比 $\lambda = a/b$ の関係を求めればよい. つまり与えられた λ の値に対して最小の座屈応力 σ_x を与える. よって, $\sigma_x (= \bar{N}_x/h)$ を最小値にするアスペクト比 λ の値は次式で示される.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial (\lambda/m)} = 0 \quad (3)$$

ここで, $\alpha = \lambda/m$ と置き式(1)を式(3)へ代入すると次式のようになる.

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial \alpha} = \frac{\pi^2}{b^2 h} \left[-2 \frac{D_{11}}{\alpha^3} + 2D_{22} \alpha \right] = 0 \quad (4)$$

よって, 最小座屈応力を得るアスペクト比の関係は次式となる.

$$\alpha = \sqrt[4]{D_{11}/D_{22}} \quad \text{また} \quad \lambda = m \sqrt[4]{D_{11}/D_{22}} \quad (5)$$

従って, 式(5)を式(1)に代入すると最小座屈応力 $\sigma_{x, \min}$ が次式のように求められる.

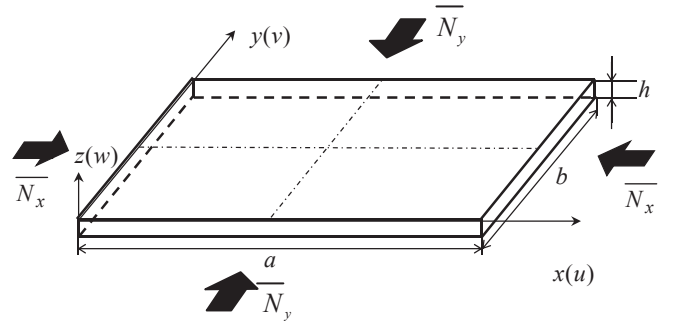


Fig. 1 Configuration and coordinates of symmetrically laminated rectangular plates under biaxial compressive loads.

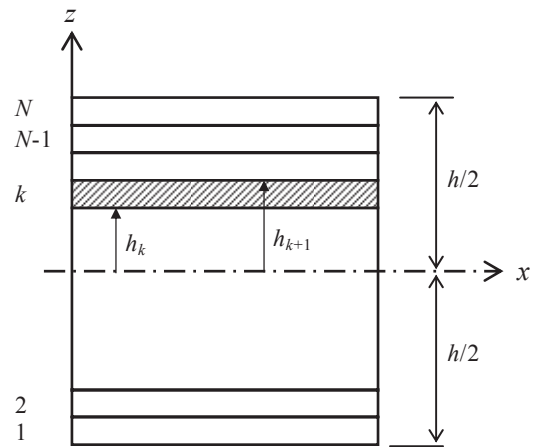


Fig. 2 Stacking sequence of symmetrically laminated Plates.

$$\sigma_{x, \min} = \frac{2\pi^2}{b^2 h} \left[\sqrt{D_{11} D_{22}} + (D_{12} + 2D_{66}) \right] \quad (6)$$

さらに, 式(1)に示す座屈固有値はアスペクト比 λ によって, x 方向の座屈半波数 m が変化する. よって, 座屈モード m が異なるが同一の座屈固有値となるアスペクト比 λ が存在する. 座屈値が一致する際のアスペクト比 λ は式(1)に $n=1, m$ および $m+1$ と連続にすることで次式のような方程式が導かれる.

$$\begin{aligned} & \pi^2 \frac{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{1}{b}\right)^4}{\left(\frac{m}{a}\right)^2} \\ &= \pi^2 \frac{D_{11} \left(\frac{m+1}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m+1}{a}\right)^2 \left(\frac{1}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{1}{b}\right)^4}{\left(\frac{m+1}{a}\right)^2} \quad (7) \end{aligned}$$

上式(7)を λ について解くと次式が得られる.

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{D_{11}}{D_{22}}} \sqrt{m(m+1)} \quad (8)$$

以上より、 x 方向からの一軸圧縮負荷時の最小座屈応力 $\sigma_{x,min}$ および座屈モードが変化する時の臨界アスペクト比 λ がそれぞれ得られる。

2. 2 二軸圧縮負荷を受ける場合

x, y 方向からの二軸圧縮負荷 \bar{N}_x, \bar{N}_y を受ける対称積層板の座屈荷重は以下のように求められる¹⁰⁾。

$$\bar{N}_x = \pi^2 \frac{D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{m}{a}\right)^2 \left(\frac{n}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4}{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + k_y \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad (9)$$

ここで、 $k_y = \bar{N}_y / \bar{N}_x$ であり、 k_y は二軸圧縮荷重比を示す。二軸圧縮荷重が作用する場合は二軸圧縮荷重比 k_y の値によって、 $n \neq 1$ ($n > 1$) が存在するため、単軸圧縮負荷と同様に $n=1$ としてアスペクト比で偏微分して最小座屈荷重を得ることは出来ない。よって、与えられた二軸圧縮荷重比 k_y の下で x, y 軸方向半波数 m, n をそれぞれ変化させ、最小値が座屈値である。

3. 一次座屈後の解析法

3. 1 一次座屈後の挙動解析

Fig.1 に示すような対称積層矩形板が面内圧縮荷重 \bar{N}_x, \bar{N}_y を受ける場合を考え、中央面の変位を u, v, w とする。面内ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 、曲率成分 $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ と変位 u, v, w との関係は座屈後の安定問題を解析するために、二次の微小項を考慮した有限変形理論を用いると次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (11)$$

一次座屈後の挙動解析では、一次座屈後の平衡方程式と適合方程式の応力関数とたわみの連立偏微分方程式を解けばよいが、非線形問題であり厳密解を得ることは困難である。したがって、Galerkin 法を用いることにより近似解を得ることができる^{7)~9)}。

周辺単純支持の場合、一次座屈後の板厚方向の面外境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{at } x=0, a \\ w &= \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{at } y=0, b \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

であり、面内境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} x=0, a \text{ で } u \text{ は } y \text{ 軸に沿って一定で} \\ \int_0^b N_x dy = -\bar{N}_x b, \quad N_{xy} = 0 \\ y=0, b \text{ で } v \text{ は } x \text{ 軸に沿って一定で} \\ \int_0^a N_y dx = -\bar{N}_y a, \quad N_{xy} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

である。ここで、 N_x, N_y, N_{xy} は単位幅当りの面内力である。

板厚方向の面外境界条件を満足するように、一次座屈後のたわみ波形 w を次式のように近似表示する。

$$w = w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (14)$$

面内境界条件を満足する応力関数を求め、Galerkin 法を適用することにより次式のような w_{mn} に関する三次方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{\pi w_{mn}}{4\lambda} \\ & \times \left[\frac{1}{h} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left\{ D_{11} \left(\frac{m}{\lambda} \right)^2 + 2(D_{12} + 2D_{66})n^2 + D_{22}n^4 \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \frac{w_{mn}^2}{16h} \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 \left\{ \frac{1}{H_{11}} \left(\frac{m}{\pi} \right)^2 + \frac{n^4}{H_{11}} \left(\frac{\lambda}{m} \right)^2 \right\} - \sigma_x (1 + k_y) \right] = 0 \quad (15) \end{aligned}$$

ここで、 H_{ij} は面内剛性 A_{ij}^{11} の逆マトリックスであり、本論文では紙面の都合上割愛するが、詳細の式は文献 8) に示される。

3. 2 一次座屈後の安定判別

一次座屈後の平衡状態の安定判別は、変位成分に関する第二変分の正負から議論できる。第二変分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta^2 \Pi &= \frac{1}{2} \iint_0^a \iint_0^b \left[\frac{1}{h} \left\{ \frac{\delta N_x^2}{E} + \frac{\delta N_y^2}{E} - 2 \frac{\nu}{E} \delta N_x \delta N_y + \frac{\delta N_{xy}^2}{G} \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ N_x \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + N_y \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \left\{ D_{11} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right)^2 + 2D_{12} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + D_{22} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right)^2 + 4D_{66} \left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (16) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \delta N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \nu \left\{ \frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right\} \right] \\ \delta N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial \delta v}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \nu \left\{ \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right\} \right] \\ \delta N_{xy} &= Gh \left[\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

である。式(16)において、 $\delta^2 \Pi > 0$ なら安定となり、 δ^2

$\Pi=0$ なら中立平衡, $\delta^2\Pi < 0$ なら不安定である. ここで仮想変位の想定は, $\delta^2\Pi$ の絶対的な正負の判定に関係する. よって, 適切な仮想変位を想定する方法として, 第二変分 $\delta^2\Pi$ の仮想変位成分について極値を求める必要がある.

ここで, 本論文では取り扱う対称積層矩形板においては, 曲げ-ねじりカップリング剛性項 D_{16} , D_{26} が生じるがそれらを考慮した薄板の座屈後解析は非常に困難であり, この曲げ-ねじりカップリング剛性項が座屈強度に与える影響は無次元異方性パラメータ γ , δ を用いて評価することができる³⁾.

$$\gamma = \frac{D_{16}}{\sqrt[4]{D_{11}^3 D_{22}}}, \delta = \frac{D_{26}}{\sqrt[4]{D_{11} D_{22}^3}} \quad (18)$$

そして, γ , δ の値がそれぞれ 0.2 より小さい積層板では曲げ-ねじりカップリング効果は無視できる³⁾. よって, 本論文では γ , δ の値が共に 0.2 以下の積層構成について取り扱う.

微小擾乱仮想変位および仮想面内力が満足すべき境界条件は次式で表される.

$$\left. \begin{aligned} \delta w = \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} = 0, \delta u = 0, \delta N_{xy} = 0 \quad \text{at } x = 0, a \\ \delta w = \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} = 0, \delta v = 0, \delta N_{xy} = 0 \quad \text{at } y = 0, b \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

また, 境界条件を満足するように, 微小擾乱仮想変位 δw を次式のように定義する.

$$\delta w = \delta w_{pq} \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} \quad (20)$$

面内境界条件(13)を満足するように仮想応力関数 δF を求める.

$$\delta F = \frac{\lambda^2}{4h} w_{mn} \delta w_{pq} \times \left\{ \begin{aligned} & - \frac{(pn - qm)^4 \cos\left\{\frac{(p-m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q-n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ & - \frac{(pn - qm)^4 \cos\left\{\frac{(p+m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q+n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \\ & + \frac{(pn + qm)^4 \cos\left\{\frac{(p+m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q-n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ & + \frac{(pn + qm)^4 \cos\left\{\frac{(p-m)\pi x}{a}\right\} \cos\left\{\frac{(q+n)\pi y}{b}\right\}}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

式(16)の第二変分 $\delta^2\Pi$ より, 二重積分をすると安定判別式として次式を得る.

$$\delta^2\Pi = \delta w_{pq}^2 \left[\frac{\lambda^4 w_{mn}^2}{128b^2 h} \times \left\{ \begin{aligned} & - \frac{(pn - qm)^4 \delta\delta_p \delta\delta_q}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ & - \frac{(pn - qm)^4}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \\ & + \frac{(pn + qm)^4 \delta\delta_q}{H_{11}(p+m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p+m)^2(q-n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q-n)^4} \\ & + \frac{(pn + qm)^4 \delta\delta_p}{H_{11}(p-m)^4 + \lambda^2(2H_{12} + H_{66})(p-m)^2(q+n)^2 + \lambda^4 H_{11}(q+n)^4} \end{aligned} \right\} + \frac{\pi^4 w_{mn}^2}{128b^2 h} \left(\frac{m^2 p^2}{H_{11} \lambda^3} \delta_p + \frac{n^2 q^2}{H_{11}} \delta_q \right) - \sigma_x \left\{ \frac{(p\pi)^2}{8\lambda} h + k_y \frac{(q\pi)^2}{8} \lambda h \right\} + \frac{1}{8} \frac{(p\pi)^4}{b^2 \lambda^3} \left\{ D_{11} + 2\lambda^2 \left(\frac{q}{p} \right)^2 (D_{12} + 2D_{66}) + \lambda^4 D_{22} \left(\frac{q}{p} \right)^4 \right\} \right] \quad (22)$$

ここで,

$$\left. \begin{aligned} \delta\delta_p = 2 \quad (p = m \text{ の時}) & \quad \delta\delta_q = 2 \quad (q = n \text{ の時}) \\ = 1 \quad (p \neq m \text{ の時}) & \quad = 1 \quad (q \neq n \text{ の時}) \\ \delta_p = 1 \quad (p = m \text{ の時}) & \quad \delta_q = 1 \quad (q = n \text{ の時}) \\ = 0 \quad (p \neq m \text{ の時}) & \quad = 0 \quad (q \neq n \text{ の時}) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

これより, p, q を変化させることにより安定判別を行う.

4. 数値計算例と解析結果の検討

炭素繊維強化プラスチック(CFRP)材の対称積層矩形板について数値計算を実行した. その基本弾性定数(繊維容積含有率 $V_f = 60\%$)は, 平均化近似解法により計算され, 実験でも確認された値である¹²⁾.

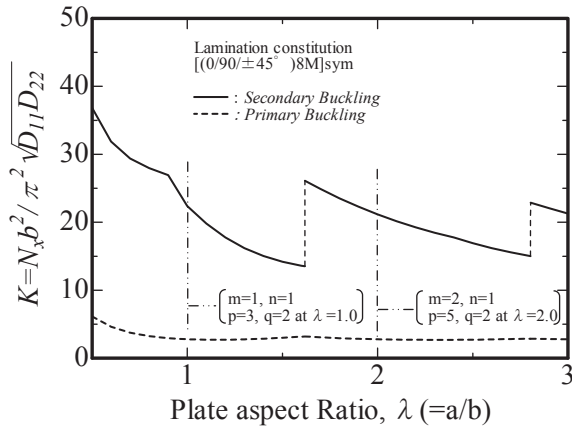
$$\left. \begin{aligned} E_L = 137(\text{GPa}), E_T = 8.17(\text{GPa}), G_{LT} = 4.75(\text{GPa}) \\ \nu_L = 0.316, \nu_T = 0.0189 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

数値計算例として, $M.P.Nemeth^3)$ が示す $[0/90/\pm 45]_{sym}$ および $[\pm 45/0/90]_{sym}$ 積層構成で積層数を $N=8, 24, 48$ と変化させた.

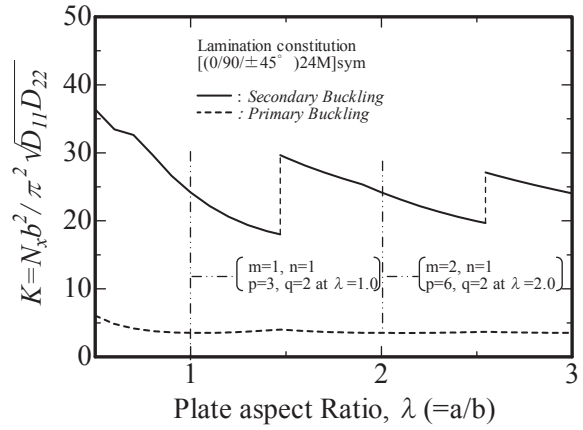
二軸圧縮負荷を受ける対称積層矩形板の二次座屈について, 一例として, 上記の積層構成の場合について, アスペクト比 $\lambda (=a/b)$ を 0.5~3.0 まで変化させ, その時の無次元平均軸圧縮応力 $K (=N_x b^2 / \pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}})$ について, **Fig.3~5** に $[0/90/\pm 45]_{sym}$ の $N=8, 24, 48$ の解析結果を示し, また, $[\pm 45/0/90]_{sym}$ の $N=8, 24, 48$ の解析結果を **Fig.6~8** にそれぞれ示す.

さらに, 二軸圧縮荷重比 k_y の影響を見るために, k_y を 0.0, 0.5, 1.0 と変化させ, **Fig.3~8** の(a)~(c)にそれぞれ示す. ここで, $k_y=0.0$ は x 軸方向からの単軸圧縮負荷状態を表し, 図中において, 破線は一次座屈値, 実線が二次座屈値であり, 一例として λ が 1.0 および 2.0 における座屈時の x, y 軸方向の座屈半波数 m, n と微小擾乱半波数 p, q を示している.

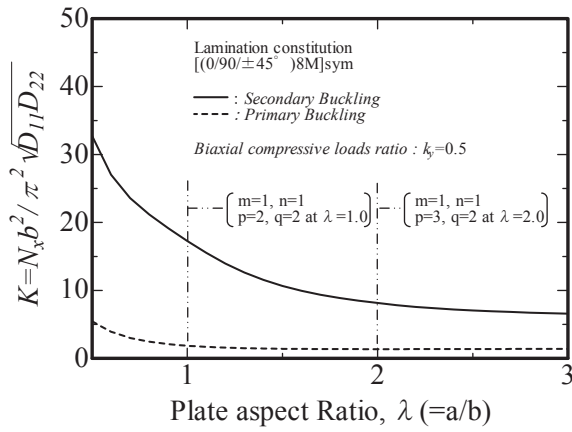
対称積層矩形板における全ポテンシャルエネルギーの第二変分 $\delta^2\Pi$ は微小擾乱半波数 p, q の大きさに依存しており, このとき p, q は一次座屈半波数 m, n より必ず大



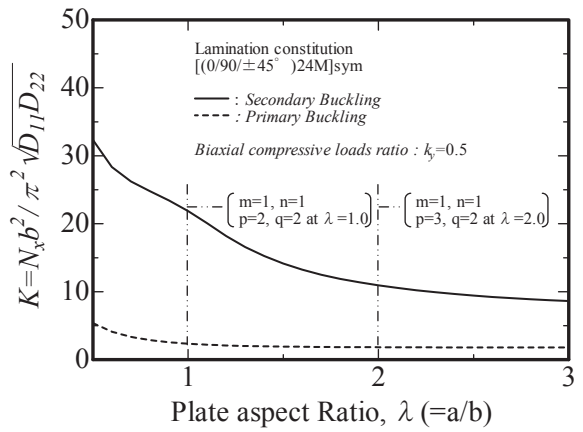
(a) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0$



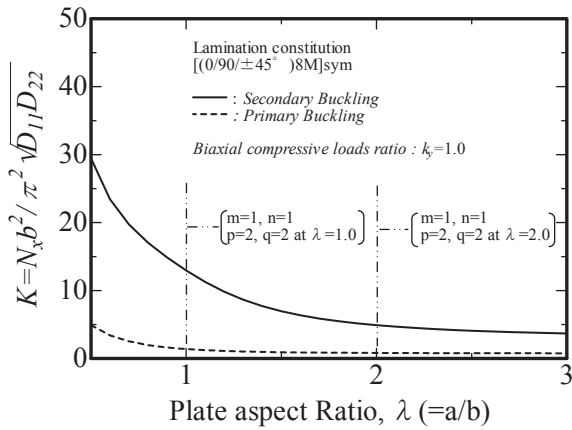
(a) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0$



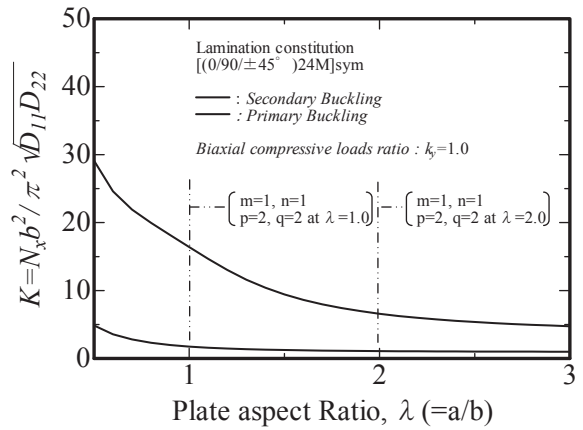
(b) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.5$



(b) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.5$



(c) Biaxial compressive loads ratio $k_y=1.0$



(c) Biaxial compressive loads ratio $k_y=1.0$

Fig.3 Relationship non-dimensional buckling stresses K and plate aspect ratio $\lambda(=a/b)$, at lamination constitution $(0/90/\pm 45^\circ)_8M$, biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0, 0.5$ and 1.0 .

Fig.4 Relationship non-dimensional buckling stresses K and plate aspect ratio $\lambda(=a/b)$, at lamination constitution $(0/90/\pm 45^\circ)_{24M}$, biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0, 0.5$ and 1.0 .

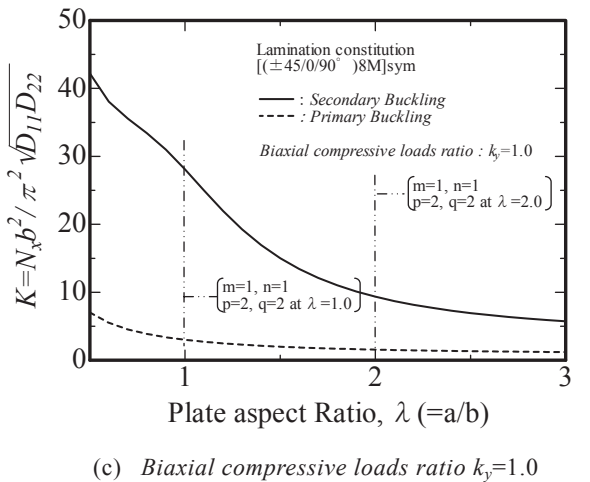
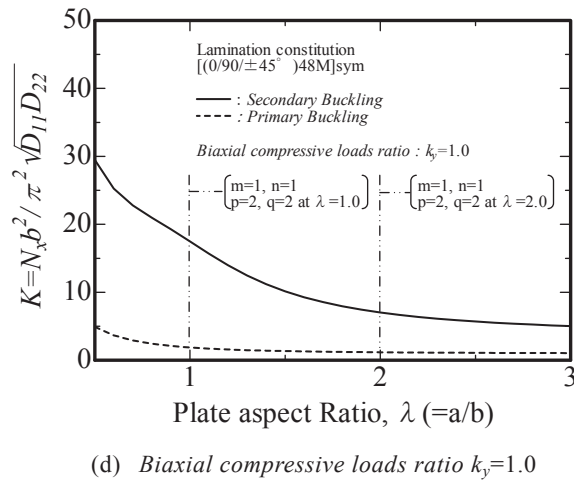
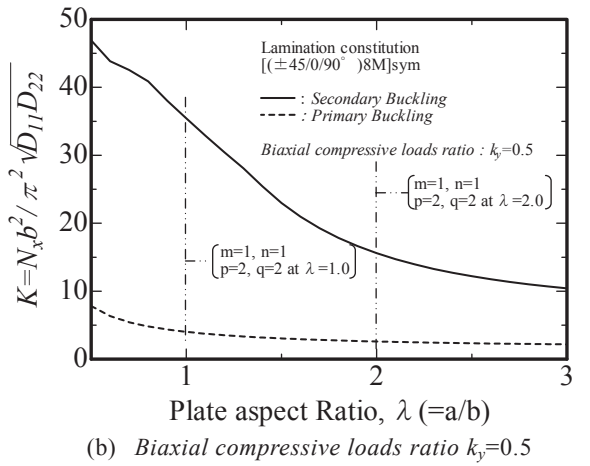
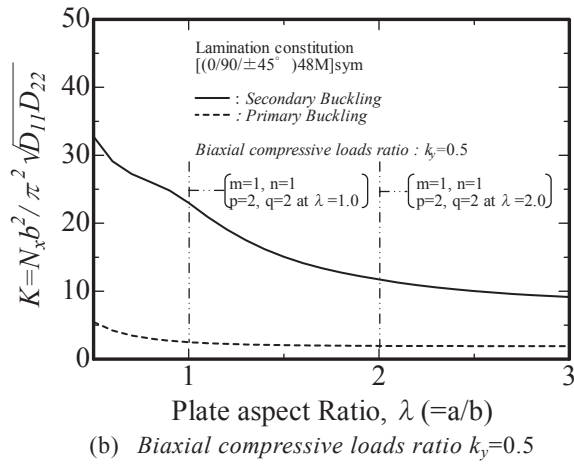
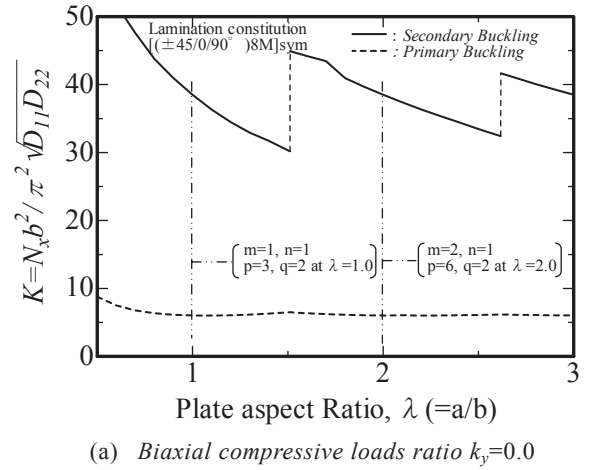
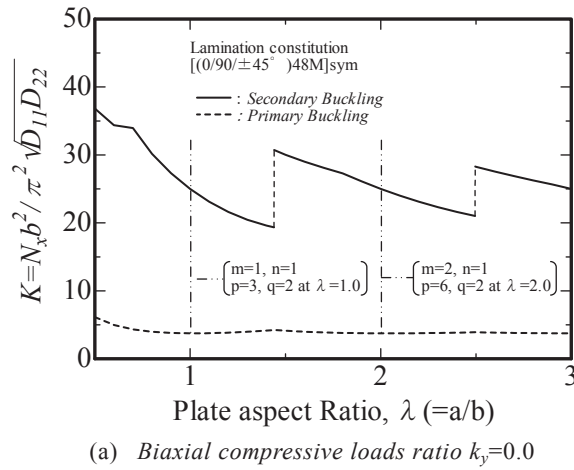
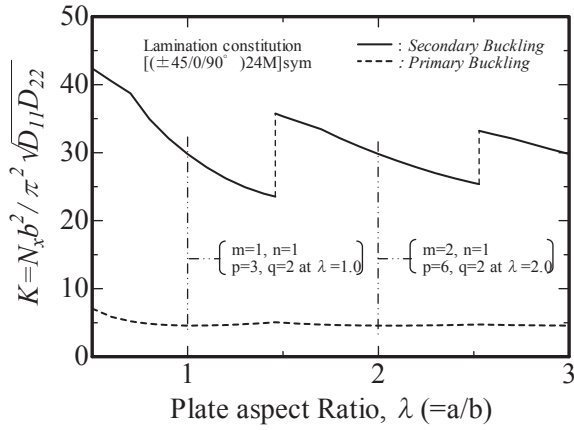
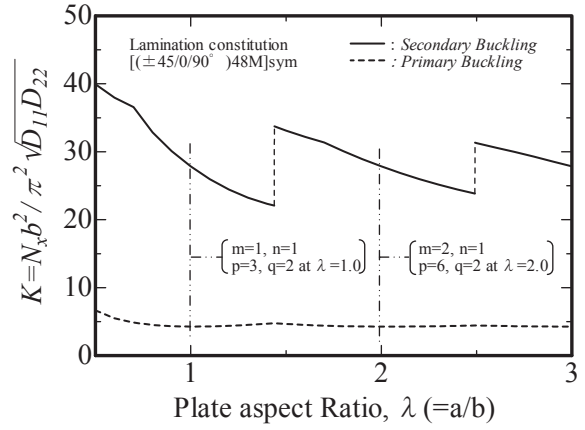


Fig.5 Relationship non-dimensional buckling stresses K and plate aspect ratio $\lambda(=a/b)$, at lamination constitution $(0/90/\pm 45^\circ)_48M$, biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0, 0.5$ and 1.0 .

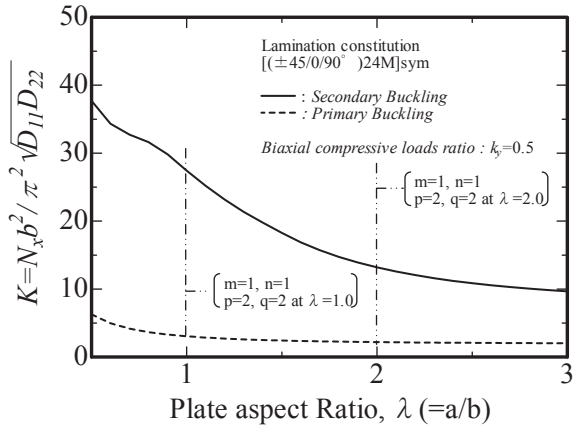
Fig.6 Relationship non-dimensional buckling stresses K and plate aspect ratio $\lambda(=a/b)$, at lamination constitution $(\pm 45/0/90^\circ)_8M$, biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0, 0.5$ and 1.0 .



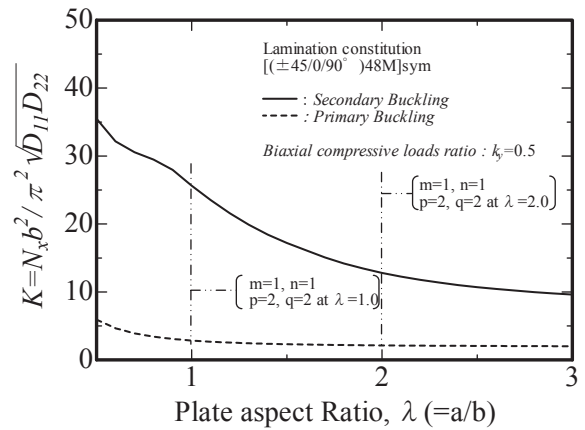
(a) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0$



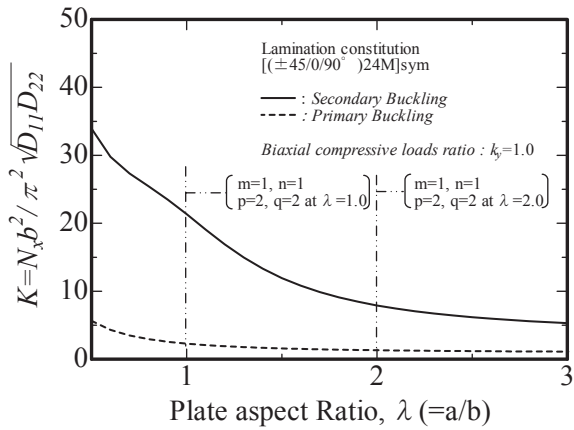
(a) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0$



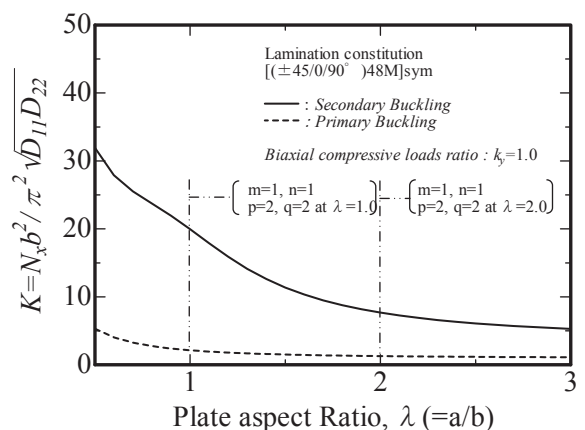
(b) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.5$



(b) Biaxial compressive loads ratio $k_y=0.5$



(c) Biaxial compressive loads ratio $k_y=1.0$



(c) Biaxial compressive loads ratio $k_y=1.0$

Fig.7 Relationship non-dimensional buckling stresses K and plate aspect ratio $\lambda(=a/b)$, at lamination constitution $(\pm 45/0/90^\circ)$ 24M, biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0, 0.5$ and 1.0 .

Fig.8 Relationship non-dimensional buckling stresses K and plate aspect ratio $\lambda(=a/b)$, at lamination constitution $(\pm 45/0/90^\circ)$ 48M, biaxial compressive loads ratio $k_y=0.0, 0.5$ and 1.0 .

きく常に整数値を取る。微小擾乱半波数 p, q をそれぞれ変化させ $\delta^2\Pi=0$ となる場合、つまり、安定限界での荷重値を算出し、その中での最小値を二次座屈値とする。微小擾乱半波数 p, q の値が小さいと常に安定状態 $\delta^2\Pi > 0$ となり、二次座屈現象を示すことができない場合がある。それ以外の微小擾乱半波数 p, q の値では安定状態から不安定状態に変化するため、二次座屈現象の必然性を示すことが可能となった。

一軸圧縮荷を受ける場合、板のアスペクト比に対する一次座屈値の最小値は式(6)から算出される。一方、二次座屈値の最小値を理論的に誘導することは非常に難しいが、Fig.3~8の解析結果から、一次座屈モードが変化する最初のモードのアスペクト比、すなわち式(8)で得られる最低時のモードにて最小の二次座屈が発生していることが判る。

そして、二軸圧縮荷を受ける一次および二次座屈値は、Fig.3~8の(b)および(c)に示すように、一次座屈値はアスペクト比 λ の増加とともに座屈値は一定値へ収束していく。また、二次座屈値もアスペクト比の増加に伴い、座屈値は減少し、ほぼ収束していくことが判る。なお、前述した一軸圧縮荷を受ける対称積層矩形板に対しては、二次座屈値は一次座屈の x 軸方向の座屈半波数 m が変化したアスペクト比 λ で不連続となりながら、二次座屈値は一定値へ収束していく。これは一次座屈時の x 軸方向半波数 m が変化するため、二次座屈時の x 軸方向の微小擾乱半波数 p が高次となるため、そのアスペクト比において、二次座屈値が不連続となる。この二次座屈値の挙動については等方性材料の薄板矩形板の解析結果⁶⁾と定性的に一致する。

積層構成の影響について着目すると、Fig.3~5 および Fig.6~8 の解析結果から、対称積層矩形板の場合、同じ方向の層を積層した場合でも積層方法により、曲げ剛性 D_{ij} が異なるので、座屈値への影響は小さくないことが判る。これは中央面に対して同じ方向の層を積層すれば面内剛性は中央面を境にして上下面で打ち消しあうので変化はないが、曲げ剛性 D_{ij} は積層数によって変化し、各座屈値へ影響を与えていることを意味する。

また、二軸圧縮荷重比 k_y を増加させると、一次座屈値、二次座屈値共に低下する。前記に示したように、二次座屈値は一次座屈時の x および y 軸方向の座屈半波数 m, n に大きく依存する。よって、アスペクト比が増加しても二軸圧縮荷重比 k_y の変化によって一次座屈時の x 軸方向の座屈半波数 m が $m=1$ で最小座屈値を得ると二次座屈値の微小擾乱半波数は低次となり、二次座屈値も低下することを理論的に明らかにすることができた。

5. あとがき

本論文では、積層角が $0^\circ, 90^\circ$ および $\pm 45^\circ$ からなる積層構成で二軸圧縮荷を受ける対称積層矩形板の二次座屈現象について、全ポテンシャルエネルギーの第二変分により安定判別法を用いることにより明らかにした。

これより、一次座屈後の対称積層矩形板の耐荷能力を明らかにし、積層構成、二軸圧縮荷および板のアスペクト比が二次座屈値に与える影響について解析的に示すことができた。

参考文献

- 1) 粕谷平和, 植村益次: 積層複合円筒殻の軸圧縮座屈に及ぼすカップリング効果, 日本航空宇宙学会誌, Vol.30, No.346, pp.664-675 (1982).
- 2) 福永久雄, 関根英樹, 佐藤正喜, 飯野明: 対称積層板の圧縮座屈特性に及ぼす曲げ・ねじりカップリング効果, 日本機械学会論文集 A 編, Vol.59, No.566, pp.2343-2349 (1993).
- 3) Michael P.Nemeth, Importance of Anisotropy on Buckling of Compression-Loaded Symmetric Composite Plates, AIAA Journal, Vol.24, No.11, pp.1831-1835 (1986).
- 4) 寺田雄一郎, 轟章, 島村佳伸: フラクタル分岐限定法を用いた複合材料積層板の積層構成最適化: 日本機械学会論文集 A 編, Vol.66, No.664, pp.714-720 (2000).
- 5) 邊吾一, 植村益次: 一軸圧縮を受ける薄板の二次座屈現象の研究, 日本機械学会論文集, Vol.43, No.372, pp.2818-2827(1977).
- 6) T. Nakamura and K. Uetani: The secondary buckling and post-secondary buckling behavior of rectangular plates, Int. J Mech. Sci. No.21, pp.265-286 (1979).
- 7) 粕谷平和, 根本圭一, 辻本真之: 二軸圧縮荷を受けるアングルプライ積層矩形板の座屈強度, 設計工学, Vol.43, No.10, pp.562-568 (2008).
- 8) Keiichi Nemoto, Hirakazu Kasuya, Hisao Kikugawa and Tooru Kohiga: Post-Buckling Stability Analysis of Composite Laminated Flat Plates with Initial Deflection under Biaxial Compression, Materials Transaction, Vol.54, No.8, 1437-1443(2013).
- 9) 根本圭一, 小比賀透, 菊川久夫, 森山裕幸, 粕谷平和: 二軸圧縮荷を受ける対称積層板の座屈後挙動に及ぼす積層構成の影響, 東海大学工学部紀要, Vol.52, No.1, pp.49-54 (2012).
- 10) 林毅(編): 複合材料工学, 日科技連出版, pp.803(1971).
- 11) R.M. Jones: "Mechanics of Composite Materials", Chap.4, McGraw-Hill, New York (1975).
- 12) 植村益次, 山田直樹: 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, 材料, Vol.24, No.257, pp.156-163 (1975).