

衝撃静水圧力を受けるアングラプライ積層円筒殻 の動的安定性に及ぼす構造減衰の影響

山岸 保司^{*1}・田邊 裕明^{*2}・石原 康臣^{*3}・押野谷 康雄^{*4}・粕谷 平和^{*4}

Effect of Structural Damping on Dynamic Stability of Angle-Ply Laminated Cylindrical Shells under Impact Hydrostatic Pressure

by

Yasuji YAMAGISHI, Hiroaki TANABE, Yasuomi ISHIHARA,
Yasuo OSHINOYA and Hirakazu KASUYA

(Received on September 30, 2006, accepted on November 22, 2006)

Abstract

This paper deals with the dynamic stability of composite laminated cylindrical shells under impact hydrostatic pressure. First, the motion of cylindrical shells under impact hydrostatic pressure is defined as axially symmetric motion. Following this definition, certain perturbations are superimposed on this motion, and their effect on the behavior of a shell is investigated. The symmetric state of motion of the shell is stable if the perturbations remain bounded. The solutions for the prebuckling motion and perturbed motion are obtained by Galerkin's method. Stable regions are determined using Mathieu's equation. The inevitability of dynamically unstable behavior is proved analytically, and the effects of various factors, such as structural damping, hydrostatic pressure ratio, lamination angle and the dynamic unstable mode, are clarified.

Keywords: Structural analysis, Angle-ply laminated cylindrical shells, Impact hydrostatic pressure, Structural damping, Dynamic stability, Mathieu's equation

1. まえがき

複合材料を用いて航空宇宙機器のような薄肉構造物を設計しようとするとき、構造物に作用する衝撃負荷の存在を考慮する必要があり、動的安定問題の力学的な解明は重要な研究課題である¹⁾³⁾。特に宇宙構造物は非常に柔軟であり、また大気が存在しない環境での使用を目的とすることから、構造物の減衰が重要な問題となる。実際の積層構造物の動的応答は、構造物の積層構成のみならず、構造減衰の影響も大きく受けるため、構造安定性に及ぼす積層構成効果と構造減衰の影響の解明は実用上の見地のみならず、学術的にも非常に興味のある問題である。

円筒殻が軸対称荷重を受ける場合、初期運動は軸対称運動を起こす。座屈前軸対称運動を考慮することによって、衝撃継続時間が十分に長い場合には、静的座屈値より低い値で動的不安定となる可能性を著者らは既報において示している⁴⁾⁶⁾。

本論文では、衝撃静水圧力を受けるアングラプライ積層円筒殻を例に挙げ、既報と同様な手法を用いて動的不安定現象の必然性を示すとともに、Mathieu形方程式に加えた構造減衰要素が不安定モード、不安定領域に与える影響につ

いて検討する。手法としては、基礎方程式から Mathieu 形方程式を導き、パラメータの一つである静的座屈値を Flügge の殻理論によって解析する。そして、Mathieu の安定判別線図を用いて静的座屈値以下の衝撃静水圧力を負荷させた場合でも、不安定モードが発生することを明らかにし、不安定現象に与える諸因子の影響を解析的手法により検討する。

2. 理論的解析法

2.1 基礎式 解析モデルとして Fig.1 に示すような半径 R 、筒長 L 、板厚 h のアングラプライ積層円筒殻が衝撃静水圧力 $p(t)$ を受ける場合を考える。座標原点を円筒殻中央にとり、軸方向、円周方向、板厚方向にそれぞれ x 、 y 、 z 軸をとる。変位の二次の微小項を考慮し、有限変形理論を用いた円筒殻の中央面における面内ひずみ成分 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 、曲率成分 κ_x 、 κ_y 、 κ_{xy} と変位成分 u 、 v 、 w との関係は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{w}{R} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} (1)$$

* 1 富士重工業株式会社航空宇宙カンパニー航空機設計部
* 2 株式会社タチエス第一設計チーム
* 3 工学研究科機械工学専攻修士課程
* 4 工学部動力機械工学科教授

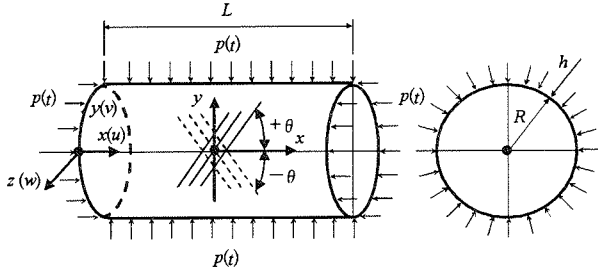


Fig.1 Configuration and coordinates of angle-ply laminated cylindrical shells.

永井ら^{2,3)}も指摘しているように、円筒殻が十分に薄肉の場合には、面内および回転慣性力の影響はいずれも無視することができる。本解析モデルの積層円筒殻は十分に薄肉と考えられるため、板厚方向すなわち面外慣性力のみ考慮し、ひずみ、曲率成分と各種剛性項からなる合応力 N_x , N_y , N_{xy} および合モーメント M_x , M_y , M_{xy} を用いることによって面内および面外の平衡方程式はそれぞれ次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{N_y}{R} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &+ N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} (2)$$

ただし本解析では、板厚方向に均質なる直交異方性材料を考慮しているため、式(2)中の合応力、合モーメントに含まれるカップリング項は無視される。また、式(2)中の ρ は構成材料の密度を表す。さらに板厚方向の平衡方程式は、応力関数 F を用いた次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \\ - h \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2h \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ + p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで D_{ij} は曲げ剛性項である。一方、適合条件式は、次式のようになる。

$$\begin{aligned} E_x \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \left(2\nu_x E_y - \frac{E_x E_y}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} \\ = E_x E_y \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

なお、式(4)中の E_x, E_y は軸方向と円周方向のヤング率、 G_{xy} は面内せん断剛性率、 ν_x, ν_y は軸方向と円周方向に対するポアソン比である。

境界条件は、両端 ($x=\pm L/2$) において単純支持と仮定しているため次式のように表せる。

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad N_x = 0, \quad v = 0 \quad (5)$$

2.2 負荷条件 円筒殻に作用する衝撃静水圧力 $p(t)$ の負荷条件を次式に示す。

$$\left. \begin{aligned} p(t) = \frac{t}{t_p} p_0, \quad N_x(t) = \frac{p(t)R}{2} = \frac{t}{t_p} N_{x0} \quad (0 \leq t \leq t_p) \\ p(t) = p_0, \quad N_x(t) = \frac{p(t)R}{2} = \frac{p_0 R}{2} = N_{x0} \quad (t_p \leq t) \end{aligned} \right\} (6)$$

これは、衝撃静水圧力が $t=0$ から作用し、 $0 \leq t \leq t_p$ で直線的に $p(t)$ が増加し、 t_p 時間後に一定値 p_0 に保たれることを示している。また、式(6)中の $N_x(t)$ は衝撃静水圧力の軸方向膜力を表している。なお、衝撃静水圧力の衝撃継続時間は無限と仮定する。

2.3 初期運動 本論文では、円筒殻に作用する衝撃静水圧力を軸対称であると仮定しているため、初期に起こる運動は軸対称運動である。その初期運動に添字 A を付けて次のように表す。

$$u_A = u_A(x, t), \quad v_A = 0, \quad w_A = w_A(x, t) \quad (7)$$

さらに初期運動における面外の平衡方程式 $H(w_A)$ は式(7)を用い、軸対称運動とすることによって次式のようになる。

$$\begin{aligned} H(w_A) \equiv D_{11} \frac{\partial^4 w_A}{\partial x^4} + N_x(t) \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} + E_y \frac{w_A h}{R^2} \\ - \nu_y \frac{N_x(t)}{R} + p(t) + \rho h \frac{\partial^2 w_A}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

式(8)で示した初期運動の平衡方程式の近似解を求めるにあたり、負荷が作用した場合の波形モード w_A を次式のように仮定する。

$$w_A = a(t) h (1 + A_1 \sin a_1 x \sinh a_2 x + A_2 \cos a_1 x \cosh a_2 x) \quad (9)$$

ここで、 $a(t)$ は初期運動の時間に関する未知数であり、式中の係数 a_1, a_2 は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{12} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) + \frac{R}{2} \frac{[T]}{4D_{11}}}} \\ a_2 &= \sqrt{\frac{1}{2R} \sqrt{\frac{1}{D_{11}} \left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}} \right) - \frac{R}{2} \frac{[T]}{4D_{11}}}} \end{aligned} \right\} (10)$$

ここで A_j は伸張剛性項であり、負荷条件式(6)で示した衝撃静水圧力 p_0 と静的座屈値 p_s との比を荷重比 $I (= p_0/p_s)$ とする。また、式(10)中の固有ベクトル $[T]$ は静水圧力を受けるアングルプライ積層円筒殻の静的座屈応力⁷⁾であり、Flügge の殻理論⁸⁾による解析式は次のようになる。

$$\begin{vmatrix} H_{11} - n^2 p_s R - \lambda^2 \frac{p_s R}{2} & H_{12} & H_{13} + \lambda p_s R \\ H_{12} & H_{22} - n^2 p_s R - \lambda^2 \frac{p_s R}{2} & H_{23} - n p_s R \\ H_{13} + \lambda p_s R & H_{23} - n p_s R & H_{33} - n^2 p_s R - \lambda^2 \frac{p_s R}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

解法は、式(11)を係数行列式から一般固有値問題に帰着させることにより p_s に関する三次方程式を誘導し、これに

Newton-Raphson 法を適用する。そして、軸方向半波数 m 、円周方向波数 n を変化させて得られる p_s の正の最小値が座屈応力であり、 $p_s = [T]$ で示される。なお、式中の $\lambda (= m\pi R/L)$ は軸方向半波長、 $H_j (j=1, 2, 3)$ は形状パラメータ、各種剛性値からなる項である⁷⁾。また、式 (9) 中の係数 A_1, A_2 は境界条件により異なる値であり、両端単純支持の本解析においては式 (5) より次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= -\frac{2\alpha_1\alpha_2 \sin\alpha_1 \sinh\alpha_2 + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \cos\alpha_1 \cosh\alpha_2}{2\alpha_1\alpha_2 (\cosh^2\alpha_2 - \sin^2\alpha_1)} \\ A_2 &= -\frac{2\alpha_1\alpha_2 \sin\alpha_1 \sinh\alpha_2 - (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \cos\alpha_1 \cosh\alpha_2}{2\alpha_1\alpha_2 (\cosh^2\alpha_2 - \sin^2\alpha_1)} \end{aligned} \right\} (12)$$

ここで、式 (12) 中の α_1, α_2 は式 (10) の a_1, a_2 の無次元量である⁴⁾。そして初期運動のため w_A 成分の時間に関する未知数 $a(t)$ を次の Galerkin 法を用いて求める。

$$\int_{-L/2}^{L/2} H(w_A)(1 + A_1 \sin \alpha_1 x \sinh \alpha_2 x + A_2 \cos \alpha_1 x \cosh \alpha_2 x) dx = 0 \quad (13)$$

式 (9) の w_A を式 (8) に代入し、式 (13) の Galerkin 法を用いることによって $a(t)$ に関する二階常微分方程式が次式のように得られる。なお、式中の各種記号は紙面の都合上省略する⁴⁾。

$$\begin{aligned} &\rho h^2 (Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2) \frac{d^2 a(t)}{dt^2} + h \left\{ \frac{E_y h}{R^2} (Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{2}{L} \right)^2 N_x(t) (B_1 Y_1 + B_2 Y_2) + \left(\frac{2}{L} \right)^4 D_{11} (C_1 Y_1 + C_2 Y_2) \right\} a(t) \\ &\quad + \left\{ -\frac{v_y}{R} N_x(t) + p(t) \right\} Y_0 = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

また、時間 t, t_p を次のように無次元化する。

$$\tau = \frac{t}{R} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}}, \quad \tau_p = \frac{t_p}{R} \sqrt{\frac{E_y}{\rho}} \quad (15)$$

そして、式 (6) と式 (13) を用いることによって次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} + \left(q + r \frac{\tau}{\tau_p} \right) a(\tau) + s \frac{\tau}{\tau_p} &= 0 \quad (0 \leq \tau \leq \tau_p) \\ \frac{d^2 a(\tau)}{d\tau^2} + (q + r) a(\tau) + s &= 0 \quad (\tau_p \leq \tau) \end{aligned} \right\} (16)$$

ここで、式中の q, r, s は各種衝撃負荷形態時の解析式⁴⁾より求められ、衝撃静水圧力負荷の場合には、簡略化された次式となる。

$$\left. \begin{aligned} q &= 1 + \frac{D_{11}}{h} \frac{R^2}{E_y} \left(\frac{2}{L} \right)^4 \frac{C_1 Y_1 + C_2 Y_2}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} \\ r &= \frac{4[T]}{E_y h} \frac{R}{2} \left(\frac{R}{L} \right)^2 \frac{B_1 Y_1 + B_2 Y_2}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} I \\ s &= \left\{ -\frac{v_y}{E_y} \frac{[T]}{2} \left(\frac{R}{h} \right)^2 + \frac{[T]}{E_y} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \right\} \frac{Y_0}{Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2} I \end{aligned} \right\} (17)$$

式 (17) の係数 r は衝撃外圧力時には現れない項であり、衝撃静水圧力の軸力による影響を表している^{5,6)}。なお、未知数 $a(\tau)$ の初期条件は、 $\tau = 0$ で次式となる。

$$a(\tau) = 0, \quad \frac{da(\tau)}{d\tau} = 0 \quad (18)$$

これにより、初期条件式 (18) のもとで式 (16) を解くことによって $a(\tau)$ を求めることができる。

2. 4 擾乱に関する方程式 初期運動に関する安定、不安定を議論するために、微小擾乱変位 u_B, v_B, w_B を初期運動に加え、その後の応答を調べる。境界条件式 (5) を満足する変形様式として、微小擾乱変位と擾乱時の応力関数を次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} w_B &= b(t) h \cos \frac{m \pi x}{L} \sin \frac{ny}{R} \\ F_B &= f_B(x, t) \sin \frac{ny}{R} \end{aligned} \right\} (19)$$

式 (19) 中の軸方向半波数 m は奇数波であり、 $b(t)$ は擾乱成分の時間に関する未知数である。初期運動の安定、不安定を議論するために、初期運動に微小擾乱を与え、その時間に対する変化を調べる。そこで、微小擾乱成分に関する平衡方程式および適合条件式を次のように示す。

$$\begin{aligned} I(w_B) &= D_{11} \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_B}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_B}{\partial y^4} + N_x(t) \frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} \\ &\quad + h \left\{ v_y \frac{N_x(t)}{h} - E_y \frac{w_A}{R} \right\} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} + \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2} - h \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} \\ &\quad + \rho h \frac{\partial^2 w_B}{\partial t^2} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E_x \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^4} - \left(2v_x E_y - \frac{E_x E_y}{G_{xy}} \right) \frac{\partial^4 F_B}{\partial x^2 \partial y^2} + E_y \frac{\partial^4 F_B}{\partial y^4} \\ = E_x E_y \left\{ \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_B}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_A}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_B}{\partial y^2} \right\} \end{aligned} \quad (21)$$

以上の式を満たすために、境界条件式 (5) に次の条件が付け加えられる。

$$N_{x,B} = 0, \quad v_B = 0, \quad \frac{\partial^2 F_B}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F_B}{\partial y^2} = 0 \quad (22)$$

2. 5 動的安定解析式 $\tau_p \leq \tau$ における初期運動の安定問題を考える。適合条件式 (21) に仮定した微小擾乱変位および擾乱時の応力関数である式 (19) を代入することによって、 f_B に関する 4 階の偏微分方程式が得られる。これより求めた f_B を式 (19) の後の式に代入することで応力関数 F_B が次のように求められる。なお、式中の各種係数は紙面の都合上省略する⁴⁾。

$$\begin{aligned} F_B &= \frac{E_y L^2 h}{R} b(t) \left[-\frac{(m\pi)^2}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (L)^4} \cos \frac{m\pi x}{L} + a(t) \frac{n^2}{4} \frac{h}{R} \right. \\ &\quad \times \left\{ F_1 \cosh m_1 x + F_2 \cosh m_2 x + H_1 \sin \left(a_1 + \frac{m\pi}{L} \right) x \sinh a_2 x \right. \\ &\quad \left. + H_2 \sin \left(a_1 - \frac{m\pi}{L} \right) x \sinh a_2 x + J_1 \cos \left(a_1 + \frac{m\pi}{L} \right) x \cosh a_2 x \right. \\ &\quad \left. + J_2 \cos \left(a_1 - \frac{m\pi}{L} \right) x \cosh a_2 x \right\} \sin \frac{ny}{R} \end{aligned} \quad (23)$$

式 (20) の平衡方程式に応力関数、負荷条件のほか、各

諸値を代入して、擾乱成分の時間に関する未知数 $b(t)$ について導くため、次のような Galerkin 法を用いる。

$$\int_0^{2\pi R} \int_{-L/2}^{L/2} I(w_B) \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{R} dx dy = 0 \quad (24)$$

上式を解くことによって $b(t)$ に関する方程式が得られる。ここで、時間の無次元量 ζ を導入することによって、

$$\frac{d^2 b(\zeta)}{d\zeta^2} + (\phi + \phi \cos \zeta) b(\zeta) = 0 \quad (25)$$

となる、Mathieu 形方程式⁹⁾ が得られる。いま、円筒殻の構造減衰を考慮すると、式 (25) に減衰項を付け加えた次式のようになる。

$$\frac{d^2 b(\zeta)}{d\zeta^2} + 2\beta \frac{db(\zeta)}{d\zeta} + (\phi + \phi \cos \zeta) b(\zeta) = 0 \quad (26)$$

式 (26) 中の β は、減衰係数¹⁰⁾ であり、ここでは線形減衰の影響に限定して考える。式 (26) 中の Mathieu パラメータ ϕ 、 ϕ は次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2 \\ \phi &= \frac{1}{\Omega^2} Kn^2 \alpha \frac{h}{R} W_1 \end{aligned} \right\} (27)$$

式 (27) の ϕ_1 、 ϕ_2 は荷重比 I 、固有ベクトル $[T]$ を含む次式のようになる。ここで、 ϕ_2 は衝撃外圧力時には現れない項であり、衝撃静水圧力の軸力による影響を表している^{5),6)}。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{\Omega^2} \frac{h}{R} \left[\left(\frac{R}{L} \right)^4 \frac{1}{Rh^2} \right. \\ &\quad \times \frac{D_{11}(m\pi)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})(m\pi)^2 (nL/R)^2 + D_{22}(nL/R)^4}{E_y} \\ &\quad \left. + \frac{R}{h} \frac{(m\pi)^4}{(m\pi)^4 + k^2(Lm\pi)^2 + (\ell L)^4} + Kn^2 W_1 \right] \\ \phi_2 &= -\frac{1}{\Omega^2} \frac{R}{2} \frac{[T]}{E_y h} \left(\frac{R}{h} \right)^2 \left\{ (m\pi)^2 + \nu_y \left(\frac{nL}{R} \right)^2 \right\} I \end{aligned} \right\} (28)$$

式 (26) 中の Mathieu パラメータ ϕ 、 ϕ は、円筒殻の幾何学的形状、各種剛性値および荷重条件が定まると軸方向半波数 m 、円周方向波数 n のみの関数となるので、 m, n を順次変化させ、それに対する安定判別を行う。なお、式 (27) および (28) の Ω, K, α は式 (9) 中の未知数 $a(t)$ を求める際、Galerkin 法によって得られる定数項であり、 W_1 は各種剛性項、形状パラメータなどからなる項であるが、紙面の都合上省略する⁴⁾。

Mathieu 形方程式の解は、 $b(\zeta)=0$ という安定解と、 $b(\zeta)$ が発散振動となる不安定解が得られる場合があり、それは Mathieu パラメータ ϕ 、 ϕ の値に依存する。 $\phi - \phi$ 平面上で安定、不安定領域を示すには、その境界線を示す必要があり、それは方程式の性質上 2π または 4π の周期解となる⁹⁾。それらの周期解を示すことによって得られる Mathieu の安定判別線図を Fig.2 に示す。白い領域が安定領域、色付きの部分が不安定領域であり、すべての波形モードが安定領域に存在した場合、その円筒殻は構造的に安定であると言える

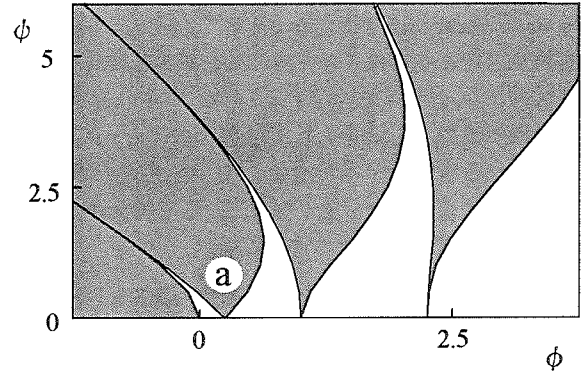


Fig.2 Mathieu's stability diagram.

3. 数値計算例と動的安定判別

一般的に減衰材料の粘弾性特性を表すためには複素弾性率が用いられるが、粘弾性体は非常に速い動的変化かあるいは遅い変化を受ける場合には弾性体として取り扱ってほぼ良いことが知られている^{11),12)}。そこで本論文に用いる弾性定数は、平均化近似解法によって計算した、繊維容積含有率 $V_f=60\%$ の炭素繊維強化プラスチック材を想定した次の値を用いる¹³⁾。

$$\left. \begin{aligned} E_L &= 137 \text{ (GPa)}, E_T = 8.17 \text{ (GPa)} \\ G_{LT} &= 4.75 \text{ (GPa)}, \nu_L = 0.316, \nu_T = 0.0189 \\ \rho &= 1540 \text{ (kg/m}^3\text{)} \end{aligned} \right\} (29)$$

座屈静水圧力より低い静水圧力が動的に作用する場合、Mathieu の安定判別線図における円周方向波数 n は放物線状に存在し、 n の増大に伴い Mathieu パラメータ ϕ 、 ϕ の値も大きくなるが、ほとんどの波形モードが安定領域に含まれる。また、第 2, 3 ... という高次の不安定領域は減衰が存在すると、不安定領域は狭められ、 ϕ の小さい所では不安定領域が安定領域に飲み込まれてしまい、とりわけ高次の不安定領域は事実上消滅してしまうことが多く、僅かな減衰の存在のために主不安定領域以外を確認することは困難となる。そこで、構造不安定領域の存在に主眼を置き、動的不安定モードについて議論するため、Fig.2 の Mathieu の安定判別線図において主不安定領域と呼ばれ、もっとも広く重要である不安定領域 a 近傍について検討する。

衝撃静水圧力を受けるアングルプライ積層円筒殻の動的安定性問題を検討する上で大きな因子として、基準となる静的静水圧力座屈値がある。著者らが以前に Flügge の殻理論を用いて解析した、静的荷重を受けるアングルプライ積層円筒殻の無次元静水圧座屈値 $K_M (= p_s R/E_T h)$ を Fig.3 に示す⁷⁾。この図から判るように、アングルプライ積層円筒殻では、軸方向半波数 m は、 $R/h, Z$ に無関係に一定値 1 であることを示している。そこで上記の内容を考慮し、動的に静水圧力が作用した場合においても不安定となる軸方向半波数 m は 1 で励起すると考えられるため、動的解析時においても $m=1$ とする。

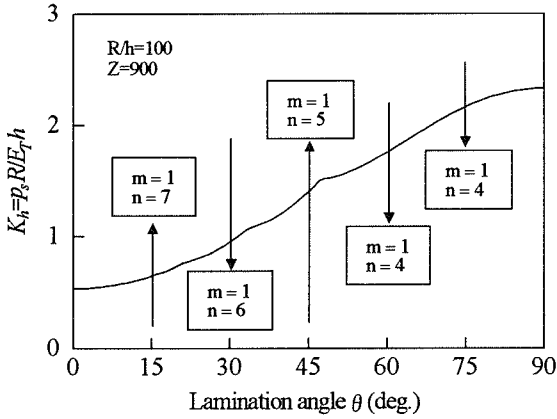


Fig.3 Variation of buckling coefficients of angle-ply laminated cylindrical shells with lamination angle θ .

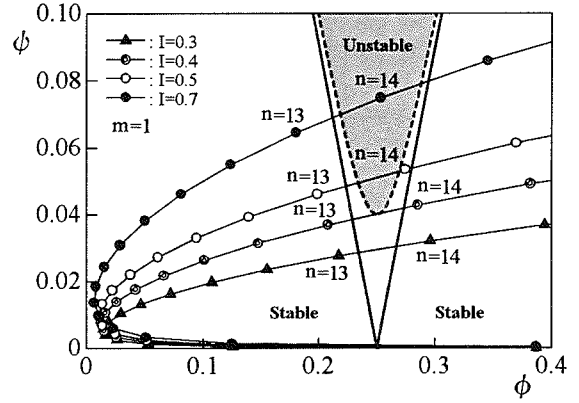
動的安定判別の一例として、式 (25) によって描かれる不安定領域を実線にて、同じく式 (26) 中の減衰係数を 0.02^{14} とした場合の不安定領域を破線にて Fig.4 に示す。ここでは、Mathieu パラメータ ϕ 、 ϕ の関係について、形状パラメータ $R/h=100$, $Z=900$, 荷重比 I が 0.3, 0.5, 0.7, そして安定限界となる荷重比を示している。荷重比を $I \leq 1$ とすることにより、静的座屈値より低い静水圧力を動的に作用させた負荷状態となる。

Fig.4 に示すように、積層角 $\theta=0 \sim 45(\text{deg})$ まで変化した場合、不安定領域もしくは不安定領域周辺における円周方向波数 n は減少し、積層角を $45 \sim 90(\text{deg})$ まで変化した場合、 n は増大する傾向がある。また、積層角の増大に伴い ϕ の値が減少傾向にある。これは波形モードが不安定領域にはいりにくくなることを意味している。このことは静的座屈解析時と定性的に一致しており、静的座屈において高い座屈値を与える積層角は動的な場合には安定していると言え、積層角の変化に伴う円周方向剛性（伸張剛性 A_{22} 、曲げ剛性 D_{22} ）の増加が、擾乱運動、初期運動を抑えたために不安定領域が減少したと考察される。なお、他の剛性項の変化による不安定領域への影響は少ない。また、Fig.3 に示してある静的座屈を起こす瞬間の円周方向波数 $n=4 \sim 7$ と比較すると、動的不安定となる場合の波数は $n=11 \sim 14$ と非常に大きな値を示している。そして高次の波形モードへの遷移によって ϕ 値は増大するが、荷重比 I を増加させることによってその差は顕著になる。

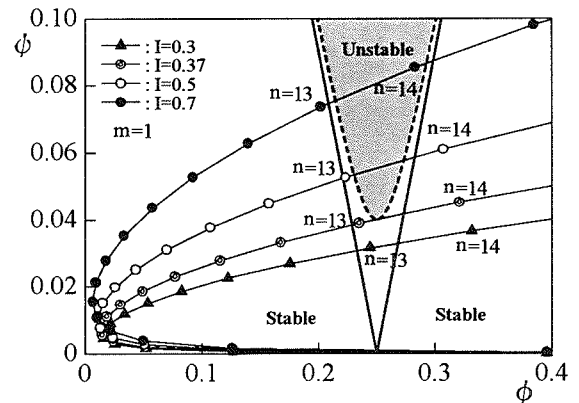
本論文では、荷重比を 0.3, 0.5, 0.7 の場合で行っているがいずれの場合もこのように静的座屈応力より低い値で構造不安定となるモードを確認することができた。

減衰が存在した場合には、 ϕ 軸に接する不安定領域は切り離され、 ϕ の小さいところでは不安定領域は安定化しているのが判る。積層角 $\theta=0 \sim 45(\text{deg})$ を見ると若干ではあるが、 θ の増加に伴い不安定を起こすための荷重比は増加している。これにより安定限界荷重比以下の波形モードはすべて安定となり、また、不安定領域の減少により、安定限界荷重比以上であっても安定となる波形モードが確認できる。

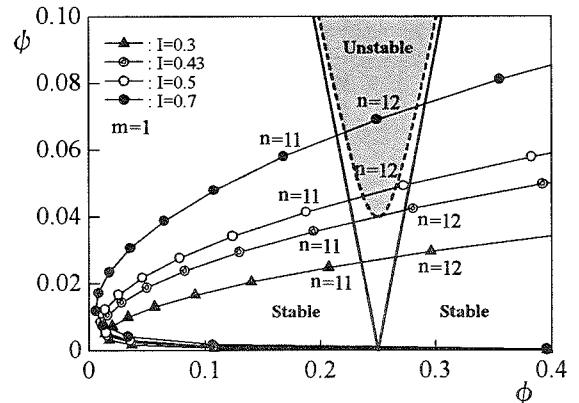
そして積層角が $60(\text{deg})$ 以上であると、減衰の影響により本解析の負荷形態では構造不安定となる領域は存在していない。そのため、積層角が $60(\text{deg})$ 以上において構造不安定となるには、荷重比 $I=1.0$ よりさらに大きな静的座屈値以上の動的負荷が必要になってしまう。しかし本解析において、応力は弾性限度内であるという仮定を用いているため、Mathieu パラメータ ϕ が静的座屈値よりも大きな値 ($I \geq 1.0$) になることは実際にはないと思われる。



(a) Lamination angle $\theta = 0(\text{deg})$



(b) Lamination angle $\theta = 15(\text{deg})$



(c) Lamination angle $\theta = 30(\text{deg})$

Fig.4 The relation between unstable region and wave mode n .

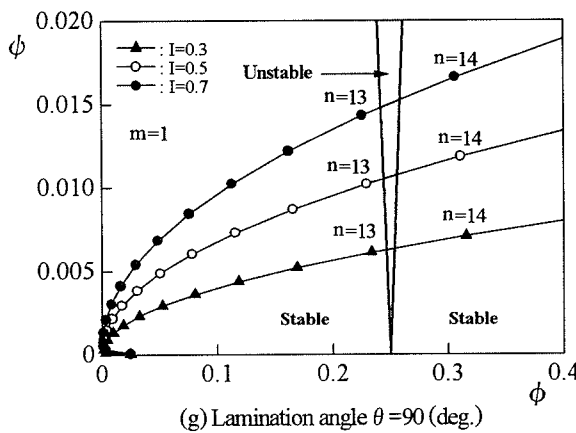
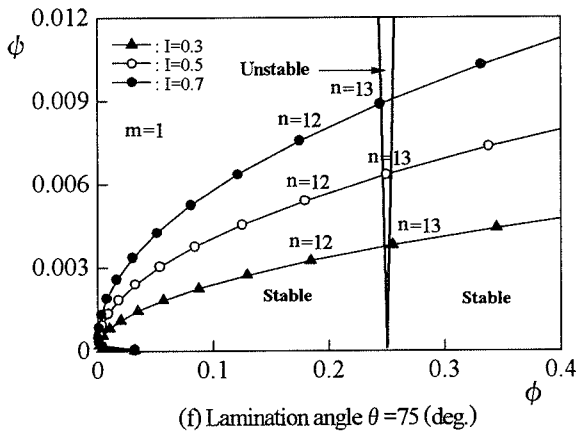
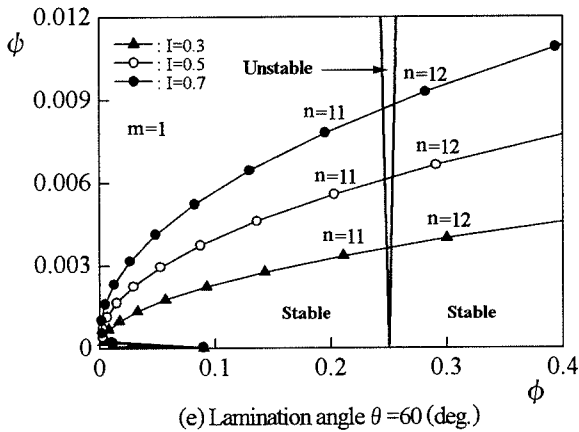
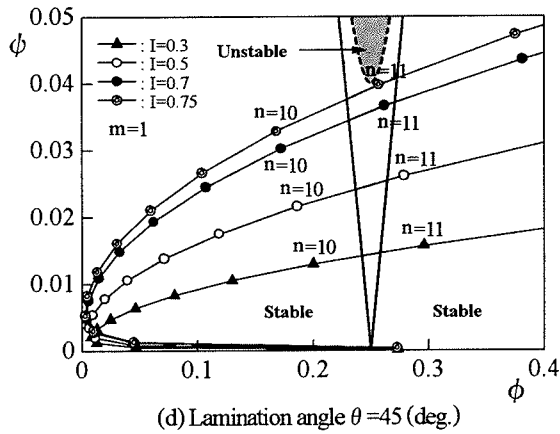


Fig.4 The relation between unstable region and wave mode n.

これらのことより、 ϕ の小さい極限られた領域での解析ではあるが、減衰が構造不安定を回避する重要な要因の一つであることがわかる。なお、減衰の影響は Mathieu パラメータの小さい時に重要であるということに注意しなければならない。

4. あとがき

本論文は、衝撃静水圧力を受けるアングラプライ積層円筒殻の不安定現象に与える諸因子の影響を、Mathieu の安定判別線図を用いて検討した。動的安定性問題を検討する上で重要な因子となる静的座屈値を Flügge の殻理論より解析し、基礎式には有限変形理論を用い、時間の未知数に Galerkin 法を適用することで Mathieu 形方程式を導き、安定判別線図より安定判別を実施した。そして、座屈前軸対称運動を考慮し、衝撃継続時間を無限と仮定することによって、静的座屈値と比較して低い衝撃静水圧力を受けた場合においても構造不安定となる可能性を示した。

また、構造減衰要素を考慮した Mathieu 形方程式から、各積層構成の不安定領域および安定限界となる荷重比を示し、安定限界荷重比以上であっても不安定領域の減少によって安定化する波形モードを確認した。

これより、積層構造物の動的安定性に及ぼす積層構成の影響ならびに構造減衰の影響を示し、これらが構造不安定を回避する重要な要因であることを呈示した。

参考文献

- 1) J.C.Yao : Dynamic Stability of Cylindrical Shells under Static and Periodic Axial and Radial Loads, *AIAA J.*, 1 (1963), pp.1391-1396.
- 2) 永井健一, 八巻昇: 周期的な圧縮荷重をうける円筒かくの動的安定, *日本機械学会論文集 A 編*, 45 (1979), pp.791-798.
- 3) 永井健一, 八巻昇: 周期的外圧力をうける円筒かくの動的安定性に及ぼす軸対称振動の影響, *日本機械学会論文集 C 編*, 53 (1987), pp.1309-1316.
- 4) 粕谷平和, 根本圭一: 衝撃軸圧縮荷重を受ける複合材料積層円筒殻の動的応答, *日本機械学会論文集 A 編*, 59 (1993), pp.454-459.
- 5) 粕谷平和, 松岡一雄: 衝撃外圧力を受ける複合材料積層円筒殻の動的安定性, *日本機械学会論文集 A 編*, 65 (1999), pp.1908-1915.
- 6) 粕谷平和, 松岡一雄: 衝撃外圧力を受けるアングラプライ積層円筒殻の動的安定性, *材料*, 48 (1999), pp.1367-1372.
- 7) 山岸保司, 佐藤孝行, 粕谷平和: 複合材料積層円筒殻の静水圧座屈に及ぼす積層構成効果, *東海大学紀要工学部*, 41 (2001), pp.129-134.
- 8) W.Flügge : *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, Berlin, 1962.
- 9) N.W.McLachlan : *Theory and Application of Mathieu Function*, Oxford University Press, New York, 1947.
- 10) B.B.ポローチン原著: 弾性系の動的安定, コロナ社, 東京, 1972.
- 11) 熊井規, 砂川恵: 浅い粘弾性球形殻の動的挙動 (第1報), *日本航空宇宙学会誌*, 19 (1971), pp.452-465.
- 12) R.M.クリステンセン著: 粘弾性力学の基礎, 雄松堂出版, 東京, 2000.
- 13) 植村益次, 山田直樹: 炭素繊維強化プラスチック材の弾性係数, *材料*, 24 (1975), pp.156-163.
- 14) 林毅: 軽構造の理論とその応用 (上), 日科技連, 東京, 1966